



KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA
2024

Panduan Guru

MATEMATIKA

Tingkat Lanjut

Edisi Revisi

Yosep Dwi Kristanto
Muhammad Taqiyuddin
Al Azhary Masta
Elyda Yulfiana

SMA/MA Kelas XI

Hak Cipta pada Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Republik Indonesia

Dilindungi Undang-Undang

Penafian: Buku ini disiapkan oleh Pemerintah dalam rangka pemenuhan kebutuhan buku pendidikan yang bermutu, murah, dan merata sesuai dengan amanat dalam UU No. 3 Tahun 2017. Buku ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi. Buku ini merupakan dokumen hidup yang senantiasa diperbaiki, diperbarui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis atau melalui alamat surel buku@kemdikbud.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XI (Edisi Revisi)

Penulis

Yosep Dwi Kristanto
Muhammad Taqiyuddin
Al Azhary Masta
Elyda Yulfiana

Penelaah

Sunardi
Kiki Ariyanti Sugeng

Penyelia/Penyelaras

Supriyatno
Lenny Puspita Ekawaty
Maharani Prananingrum

Kontributor

Iman Santoso
Siti Lita Fauziyah

Ilustrator

Yol Yulianto
Dono Merdiko

Editor

Uly Amalia
Maharani Prananingrum

Editor Visual

Nadia Mahatmi

Desainer

Dono Merdiko

Penerbit

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi

Dikeluarkan oleh

Pusat Perbukuan Kompleks Kemdikbudristek
Jalan RS. Fatmawati, Cipete, Jakarta Selatan
<https://buku.kemdikbud.go.id>

Edisi Revisi, 2024

ISBN 978-623-388-338-2 (no.jil.lengkap)
ISBN 978-623-388-339-9 (jil.1 PDF)

Isi buku ini menggunakan huruf Isi buku ini menggunakan huruf Noto Serif 11/16 pt, SIL License.
xiv, 306 hlm.: 17,6 x 25 cm.

Kata Pengantar

Pusat Perbukuan; Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi memiliki tugas dan fungsi mengembangkan buku pendidikan pada satuan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah, termasuk Pendidikan Khusus. Buku berkaitan erat dengan kurikulum. Buku yang dikembangkan saat ini mengacu pada kurikulum yang berlaku, yaitu Kurikulum Merdeka.

Salah satu bentuk dukungan terhadap implementasi Kurikulum Merdeka di satuan pendidikan ialah mengembangkan buku teks utama yang terdiri atas buku siswa dan panduan guru. Buku ini merupakan sumber belajar utama dalam pembelajaran bagi siswa dan menjadi salah satu referensi atau inspirasi bagi guru dalam merancang dan mengembangkan pembelajaran sesuai dengan karakteristik, potensi, dan kebutuhan peserta didik. Keberadaan buku teks utama ini diharapkan menjadi fondasi dalam membentuk Profil Pelajar Pancasila yang beriman dan bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, dan berakhlak mulia; berkebinekaan global, berjiwa gotong royong, mandiri, kritis, dan kreatif.

Buku teks utama, sebagai salah satu sarana membangun dan meningkatkan budaya literasi masyarakat Indonesia, perlu mendapatkan perhatian khusus. Pemerintah perlu menyiapkan buku teks utama yang mengikuti perkembangan zaman untuk semua mata pelajaran wajib dan mata pelajaran peminatan, termasuk Pendidikan Khusus. Sehubungan dengan hal itu, Pusat Perbukuan merevisi dan menerbitkan buku-buku teks utama berdasarkan Capaian Pembelajaran dalam Kurikulum Merdeka.

Kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah berkolaborasi dalam upaya menghadirkan buku teks utama ini. Kami berharap buku ini dapat menjadi landasan dalam memperkuat ketahanan budaya bangsa, membentuk mentalitas maju, modern, dan berkarakter bagi seluruh generasi penerus. Semoga buku teks utama ini dapat menjadi tonggak perubahan yang menginspirasi, membimbing, dan mengangkat kualitas pendidikan kita ke puncak keunggulan.

Jakarta, Juli 2024
Kepala Pusat Perbukuan,

Supriyatno, S.Pd., M.A.

Prakata

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Kuasa karena atas berkat-Nya, kami telah menyelesaikan buku ini. Buku ini merupakan bentuk kontribusi kami dalam mendampingi Bapak/Ibu Guru untuk merancang dan mengelola pembelajaran matematika. Semoga dengan buku ini, pembelajaran matematika dapat membentuk peserta didik menjadi pribadi yang utuh, cakap dalam bidang matematika, dan cakap dalam kompetensi-kompetensi lainnya yang lebih luas.

Buku Panduan Guru ini bertujuan memberikan pedoman bagi Bapak/Ibu Guru dalam menggunakan Buku Siswa. Dengan demikian, berbagai fitur yang terdapat pada Buku Siswa dapat dioptimalkan penggunaannya oleh Bapak/Ibu Guru. Selain itu, buku ini juga bertujuan memberikan gagasan dan saran kepada Bapak/Ibu Guru dalam merancang, memandu, mengelola, dan mengevaluasi pembelajaran matematika. Gagasan dan saran tersebut diupayakan agar tidak hanya mudah untuk diimplementasikan secara luas, tetapi juga dapat mengajak peserta didik menjadi pusat pembelajaran.

Secara garis besar, Buku Guru ini terdiri atas Panduan Umum dan Panduan Khusus. Panduan Umum tersusun atas empat bagian. *Pertama*, penjelasan mengenai tujuan Buku Panduan Guru dan potensinya untuk mengembangkan Profil Pelajar Pancasila. *Kedua*, deskripsi capaian pembelajaran, tujuan pembelajaran, dan alur tujuan pembelajaran untuk Matematika tingkat lanjut kelas XI. *Ketiga*, penjelasan tentang strategi pencapaian tujuan pembelajaran. *Keempat*, penjelasan ringkas tentang asesmen.

Panduan Khusus terdapat pada setiap bab. Panduan Khusus ini memuat gagasan atau rekomendasi pembelajaran matematika per bab bagi Bapak/Ibu Guru. Gagasan atau rekomendasi tersebut merentang dari kegiatan pembelajaran sampai kegiatan tindak lanjut. Kegiatan pembelajaran yang direkomendasikan tersebut terdiri atas beberapa aktivitas pembelajaran yang lebih kecil lagi. Hal ini dimaksudkan agar Bapak/Ibu Guru lebih merdeka dan fleksibel dalam mengimplementasikannya dalam setiap pertemuan pembelajaran.

Proses penyusunan buku panduan guru ini mendapatkan dukungan dari banyak pihak. Oleh karena itu, kami mengucapkan terima kasih kepada Prof. Dr. Sunardi, M.Pd. (Universitas Negeri Jember) dan Prof. Dr. Kiki Ariyanti Sugeng (Universitas Indonesia) yang telah mendampingi dan memberikan arahan kepada kami mulai dari awal sampai akhir. Kami juga berterima kasih kepada semua pihak dari Pusat Perbukuan, Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Republik Indonesia yang telah memfasilitasi kami dalam proses pengembangan Buku Panduan Guru ini.

Kami menerima saran dan kritik dari Bapak/Ibu Guru dan pemerhati pendidikan demi perbaikan buku ini. Pada akhirnya, semoga buku ini dapat memberikan kontribusi terhadap peningkatan kualitas pembelajaran Matematika di Indonesia.

Jakarta, Mei 2024

Tim Penulis

Daftar Isi

Kata Pengantar	iii
Prakata	iv
Daftar Isi	vi
Daftar Gambar	ix
Daftar Tabel	xi
Ada Apa di Buku Ini?	xii
Panduan Umum	1
A. Pendahuluan	2
B. Capaian Pembelajaran	5
C. Strategi Pencapaian Tujuan Pembelajaran	12
D. Asesmen	17
Panduan Khusus	19
Bab 1 Matriks	19
A. Pendahuluan	20
B. Materi Prasyarat	21
C. Apersepsi	21
D. Penilaian sebelum Pembelajaran	21
E. Panduan Pembelajaran Buku Siswa	22
F. Tindak Lanjut	46
G. Asesmen Sumatif	47
H. Kunci Jawaban	47
I. Refleksi	59
J. Sumber Belajar	60
Bab 2 Polinomial	61
A. Pendahuluan	62
B. Materi Prasyarat	63
C. Apersepsi	63
D. Penilaian sebelum Pembelajaran	65
E. Panduan Pembelajaran Buku Siswa	65
F. Tindak Lanjut	99
G. Asesmen Sumatif	99
H. Kunci Jawaban	100

I. Refleksi	112
J. Sumber Belajar	114
Bab 3 Fungsi Trigonometri.....	115
A. Pendahuluan.....	116
B. Materi Prasyarat	117
C. Apersepsi.....	117
D. Penilaian sebelum Pembelajaran.....	119
E. Panduan Pembelajaran Buku Siswa.....	119
F. Tindak Lanjut	158
G. Asesmen Sumatif	158
H. Kunci Jawaban.....	160
I. Refleksi	172
J. Sumber Belajar	173
Bab 4 Vektor	175
A. Pendahuluan.....	176
B. Materi Prasyarat	177
C. Apersepsi.....	177
D. Penilaian sebelum Pembelajaran.....	178
E. Panduan Pembelajaran Buku Siswa.....	178
F. Tindak Lanjut	197
G. Asesmen Sumatif	198
H. Kunci Jawaban.....	198
I. Refleksi	208
J. Sumber Belajar	208
Bab 5 Transformasi Geometri.....	209
A. Pendahuluan.....	210
B. Materi Prasyarat	211
C. Apersepsi.....	211
D. Penilaian sebelum Pembelajaran.....	212
E. Panduan Pembelajaran Buku Siswa.....	212
F. Tindak Lanjut	229
G. Asesmen Sumatif	229
H. Kunci Jawaban.....	230
I. Refleksi	237
J. Sumber Belajar	238

Bab 6 Fungsi dan Pemodelannya	239
A. Pendahuluan.....	240
B. Materi Prasyarat	241
C. Apersepsi.....	241
D. Penilaian sebelum Pembelajaran.....	242
E. Panduan Pembelajaran Buku Siswa.....	242
F. Tindak Lanjut	276
G. Asesmen Sumatif	276
H. Kunci Jawaban.....	276
I. Refleksi	287
J. Sumber Belajar.....	288
Glosarium.....	289
Daftar Pustaka	291
Indeks.....	294
Profil Pelaku Perbukuan.....	297

Daftar Gambar

Gambar 1	Alur Tujuan Pembelajaran	11
Gambar 1.1	Peta Materi Bab 1 Buku Siswa	20
Gambar 1.2	Selisih Rata-Rata Suhu Jayapura dan Surabaya.....	33
Gambar 2.1	Peta Materi Bab 2 Buku Siswa	62
Gambar 2.2	Diagram tentang Prevalensi Ketidacukupan Konsumsi Pangan dan Produktivitas Gabah di Indonesia	64
Gambar 2.3	Tampilan Media Pembelajaran Pemodelan dengan Fungsi Polinomial	65
Gambar 2.4	Grafik Fungsi $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$	70
Gambar 2.5	Grafik $f(x) + g(x)$ dan $f(x) - g(x)$	74
Gambar 2.6	Grafik $f(x) + h(x)$, $g(x) + h(x)$, $f(x) - h(x)$, dan $g(x) - h(x)$	75
Gambar 2.7	Grafik Fungsi $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 10x + 12$	95
Gambar 2.8	Grafik Fungsi $g(x) = x^3 - 3x + 2$	96
Gambar 3.1	Peta Materi Bab 3 Buku Siswa	117
Gambar 3.2	Tampilan Media Pembelajaran Kalkulator Matahari	118
Gambar 3.3	Contoh Data yang Dikumpulkan Peserta Didik	122
Gambar 3.4	Sudut $t = \frac{3\pi}{4}$ dalam Posisi Baku.....	126
Gambar 3.5	Segitiga dengan Sudut Dalam θ dan Panjang Sisi-Sisinya a dan b	131
Gambar 3.6	Hubungan antara Jarak Tempuh dan Ketinggian Sondang	132
Gambar 3.7	Dua Kemungkinan Grafik Hubungan Jarak Tempuh dengan Ketinggian	133
Gambar 3.8	Tampilan Media Pembelajaran	134
Gambar 3.9	Grafik Fungsi $y = \sin t$ dan $y = \cos t$ dalam Satu Periode.....	135
Gambar 3.10	Grafik Fungsi $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$	136
Gambar 3.11	Grafik Fungsi $g(x) = -\frac{1}{2} \cos x$	137
Gambar 3.12	Grafik Fungsi $h(x) = \cos \left(\frac{1}{2}x\right)$	137
Gambar 3.13	Grafik Fungsi $f(x) = 3 - \cos x$	138
Gambar 3.14	Grafik Fungsi $g(x) = 2 \tan \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	140
Gambar 3.15	Titik $P(x, y)$ dan Sudut Pusat t	143

Gambar 3.16	Tampilan Kalkulator Grafik	144
Gambar 3.17	Segitiga ABC dan Garis-Garis Tingginya	148
Gambar 3.18	Posisi Anwar dan Beto terhadap Ring Basket	151
Gambar 3.19	Ilustrasi $\angle A = 45^\circ$ serta Ruas Garis $a = 7$ dan $b = 12$.	152
Gambar 3.20	Segitiga Lancip ABC	154
Gambar 3.21	Posisi Akmal, Aira, dan Ariz.....	156
Gambar 3.22	Contoh Pos Media Sosial Peserta Didik	159
Gambar 4.1	Peta Materi Bab 4 Buku Siswa	176
Gambar 4.2	Vektor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$	179
Gambar 4.3	Sketsa Perjalanan Perahu	181
Gambar 4.4	Ilustrasi Kasus 2.....	181
Gambar 4.5	Segitiga PQR	195
Gambar 4.6	Segitiga PQR	196
Gambar 5.1	Peta Materi Bab 5 Buku Siswa	210
Gambar 6.1	Peta Materi Bab 6 Buku Siswa	240
Gambar 6.2	Grafik $f(x) = {}^2\log x$	245
Gambar 6.3	Grafik Fungsi f	247
Gambar 6.4	Grafik Fungsi h	258
Gambar 6.5	Grafik Fungsi f	260
Gambar 6.6	Grafik Fungsi f	261
Gambar 6.7	Grafik Fungsi g	262
Gambar 6.8	Grafik Fungsi h	263
Gambar 6.9	Grafik Fungsi p	263
Gambar 6.10	Grafik Fungsi Akar g	266
Gambar 6.11	Grafik Fungsi Akar h	266
Gambar 6.12	Grafik Fungsi Akar f	268
Gambar 6.13	Grafik Perjalanan Rudi.....	270
Gambar 6.14	Pemantulan Sinar pada Bidang Kartesius.....	270
Gambar 6.15	Grafik Biaya Menyewa Konsol Permainan	272
Gambar 6.16	Grafik Perjalanan Surya.....	274
Gambar 6.17	Jumlah Kuadrat Galat	275

Daftar Tabel

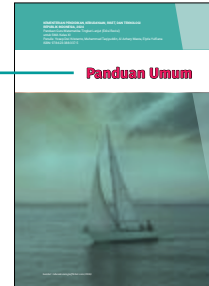
Tabel 1	Profil Pelajar Pancasila dalam Matematika Tingkat Lanjut Kelas XI	3
Tabel 2	Capaian Pembelajaran Fase F Berdasarkan Elemen	6
Tabel 3	Pemetaan Capaian Pembelajaran dan Tujuan Pembelajaran	8
Tabel 4	Siklus Pengajaran.....	14
Tabel 1.1	Panduan Refleksi Pembelajaran Matriks	60
Tabel 2.1	Contoh Rubrik Penilaian	99
Tabel 2.2	Panduan Refleksi Pembelajaran Polinomial	113
Tabel 3.1	Besar Sudut dalam Derajat dan Radian	121
Tabel 3.2	Nilai Sinus, Kosinus, dan Tangen untuk Beberapa Nilai t	126
Tabel 3.3	Nilai Sinus dan Kosinus untuk Beberapa Nilai t	135
Tabel 3.4	Contoh Rubrik Penilaian	159
Tabel 3.5	Panduan Refleksi Pembelajaran Fungsi Trigonometri.	173
Tabel 4.1	Panduan Refleksi Pembelajaran Vektor.....	208
Tabel 5.1	Contoh Rubrik Penilaian Proyek.....	235
Tabel 5.2	Panduan Refleksi Pembelajaran Transformasi Geometri	237
Tabel 6.1	Panduan Refleksi Pembelajaran Fungsi dan Pemodelannya.....	287

Ada Apa di Buku Ini?

Secara garis besar, Buku Panduan Guru ini terdiri atas Panduan Umum dan Panduan Khusus. Panduan Khusus ditujukan untuk setiap bab dalam Buku Siswa.

Panduan Umum

Panduan umum memberikan gambaran bagaimana Bapak/Ibu Guru menggunakan Buku Siswa untuk mencapai tujuan pembelajaran, mulai dari menyusun tujuan pembelajaran berdasarkan capaian pembelajaran sampai mengevaluasi pembelajaran.



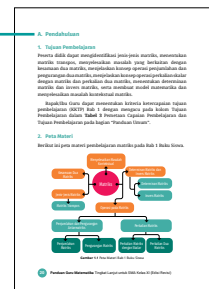
Panduan Khusus

Panduan Khusus terdiri atas beberapa komponen, mulai dari pendahuluan sampai sumber belajar.



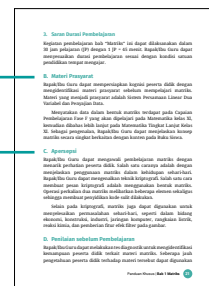
Pendahuluan

Pendahuluan menyajikan tujuan pembelajaran, peta materi, dan saran durasi pembelajaran untuk membantu Bapak/Ibu Guru dalam merancang pembelajaran.



Materi Prasyarat

Materi Prasyarat memberikan daftar materi-materi prasyarat yang perlu dikuasai peserta didik sebelum mereka mempelajari topik matematika dalam setiap bab.

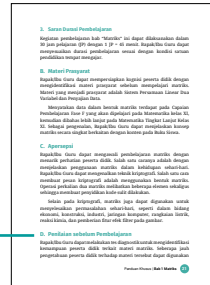


Apersepsi

Bagian ini memberikan gagasan kepada Bapak/Ibu Guru tentang bagaimana memberikan motivasi kepada peserta didik atau mengoneksikan pengetahuan awal mereka dengan topik matematika pada setiap bab.

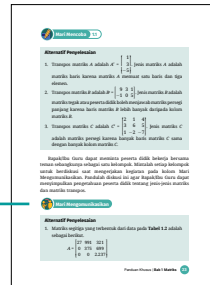
Penilaian sebelum Pembelajaran

Bagian ini memberikan saran kepada Bapak/Ibu Guru tentang bagaimana mendesain penilaian sebelum pembelajaran untuk mengetahui pengetahuan dan keterampilan awal peserta didik.



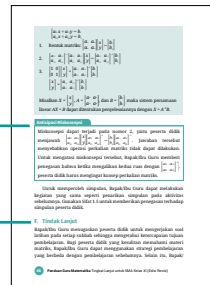
Kegiatan Pembelajaran

Kegiatan Pembelajaran terdiri atas aktivitas-aktivitas pembelajaran yang disusun per subbab. Setiap aktivitas memuat perincian tujuan pembelajaran.



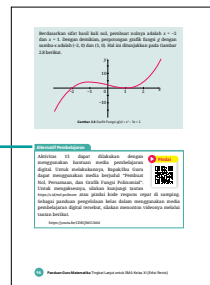
Antisipasi Miskonsepsi

Kolom Antisipasi Miskonsepsi ini memberikan gambaran tentang miskonsepsi peserta didik yang umum terjadi dalam pembelajaran dan cara mengantisipasinya.



Tindak Lanjut

Bagian ini berisi saran tentang bagaimana Bapak/Ibu Guru melakukan tindak lanjut terhadap kegiatan pembelajaran yang telah dilakukan.



Alternatif Pembelajaran

Kolom Alternatif Pembelajaran ini memberikan alternatif kepada Bapak/Ibu Guru tentang desain pembelajaran pada aktivitas pembelajaran tertentu. Pada umumnya, kolom ini terkait dengan penggunaan media pembelajaran digital dalam pembelajaran matematika.



Asesmen Sumatif

Asesmen Sumatif ini memberikan gagasan kepada Bapak/Ibu Guru tentang bagaimana menggunakan Buku Siswa untuk melakukan asesmen sumatif terhadap peserta didik.

Bagian ini berisi kunci jawaban ringkas dari bagian Latihan, Uji Kompetensi, dan Proyek dalam Buku Siswa.

Kunci Jawaban

Bagian ini berisi kunci jawaban ringkas dari bagian Latihan, Uji Kompetensi, dan Proyek dalam Buku Siswa.

Refleksi

Bagian Refleksi memberikan gagasan kepada Bapak/Ibu Guru tentang bagaimana melakukan refleksi terhadap kegiatan pembelajaran yang telah dilakukan. Selain itu, bagian ini juga memberikan ide kepada Bapak/Ibu Guru tentang bagaimana memandu peserta didik untuk melakukan refleksi terhadap pengalaman belajarnya.

Bagian Refleksi memberikan gagasan kepada Bapak/Ibu Guru tentang bagaimana melakukan refleksi terhadap kegiatan pembelajaran yang telah dilakukan. Selain itu, bagian ini juga memberikan ide kepada Bapak/Ibu Guru tentang bagaimana memandu peserta didik untuk melakukan refleksi terhadap pengalaman belajarnya.

Sumber Belajar

Sumber Belajar berisi daftar sumber belajar utama (dan penunjang) yang dapat digunakan oleh peserta didik untuk mempelajari materi pada setiap babnya.

Sumber Belajar berisi daftar sumber belajar utama (dan penunjang) yang dapat digunakan oleh peserta didik untuk mempelajari materi pada setiap babnya.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2024

Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut (Edisi Revisi)
untuk SMA Kelas XI

Penulis: Yosep Dwi Kristanto, Muhammad Taqiyuddin, Al Azhary Masta, Elyda Yulfiana
ISBN: 978-623-388-339-9

Panduan Umum



A. Pendahuluan

1. Latar Belakang dan Tujuan

Buku Siswa *Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA Kelas XI (Edisi Revisi)* memfasilitasi peserta didik untuk bermatematika melalui berbagai macam kegiatan pembelajaran. Oleh karena itu, Buku *Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA Kelas XI (Edisi Revisi)* ini disusun dengan dua tujuan utama. *Pertama*, memberikan gambaran tentang cara menggunakan Buku Siswa tersebut. Dengan demikian, berbagai fitur dalam Buku Siswa dapat dimanfaatkan secara optimal.

Kedua, rancangan pembelajaran yang disusun dalam buku ini diharapkan dapat memberikan wawasan dan gambaran bagi guru untuk merencanakan, mengelola, dan memandu jalannya pembelajaran. Buku ini memberikan rekomendasi kepada Bapak/Ibu Guru tentang bagaimana menyelenggarakan pembelajaran matematika, mulai dari persiapan pembelajaran, kegiatan pembelajaran, sampai kegiatan tindak lanjut. Rekomendasi tersebut disusun secara terstruktur di setiap bab dalam buku ini.

2. Profil Pelajar Pancasila

Kegiatan pembelajaran yang dirancang dalam buku ini diupayakan untuk memberikan sumbangsih terhadap pengembangan Profil Pelajar Pancasila. Dengan demikian, setelah mengikuti pembelajaran matematika melalui buku ini, peserta didik diharapkan tidak hanya memiliki kecakapan matematika yang mumpuni, tetapi juga memiliki karakter yang sesuai dengan jati diri bangsa Indonesia serta mampu menjadi warga dunia yang unggul dan produktif.

Tabel 1 berikut memetakan dimensi, elemen, dan subelemen Profil Pelajar Pancasila terhadap kegiatan pembelajaran dalam Buku Siswa.

Tabel 1 Profil Pelajar Pancasila dalam Matematika Tingkat Lanjut Kelas XI

Dimensi	Elemen	Subelemen	Implementasi
Beriman, Bertakwa Kepada Tuhan Yang Maha Esa, dan Berahlak Mulia	Akhlak kepada manusia	Mengutamakan persamaan dengan orang lain dan menghargai perbedaan	Mari Berkolaborasi
	Akhlak kepada alam	Menjaga lingkungan alam sekitar	Beberapa Aktivitas Interaktif (misalnya Jelajah Kepulauan Raja Ampat di Bab 6)
Berkebinekaan Global	Mengenal dan menghargai budaya	Menumbuhkan rasa menghormati terhadap keanekaragaman budaya	Matematika dalam Budaya
Bergotong Royong	Kolaborasi	Kerja sama	- Eksplorasi - Mari Berkolaborasi - Proyek
		Komunikasi untuk mencapai tujuan bersama	- Eksplorasi - Mari Berkolaborasi - Proyek
		Saling ketergantungan positif	- Eksplorasi - Mari Berkolaborasi - Proyek
		Koordinasi sosial	- Eksplorasi - Mari Berkolaborasi - Proyek
Mandiri	Pemahaman diri dan situasi yang dihadapi	Mengembangkan refleksi diri	- Proyek - Refleksi

Dimensi	Elemen	Subelemen	Implementasi
	Regulasi diri	Penetapan tujuan belajar, prestasi, dan pengembangan diri serta rencana strategis untuk mencapainya	Refleksi
		Percaya diri, tangguh (<i>resilient</i>), dan adaptif	Refleksi
Bernalar Kritis	Memperoleh dan memproses informasi dan gagasan	Mengajukan pertanyaan	Mari Berpikir Kritis
		Mengidentifikasi, mengklarifikasi, dan mengolah informasi dan gagasan	• Eksplorasi • Mari Berpikir Kritis • Proyek
	Menganalisis dan mengevaluasi penalaran		• Mari Berpikir Kritis • Mari Mengomunikasikan
	Merefleksi dan mengevaluasi pemikirannya sendiri		• Eksplorasi • Mari Berpikir Kritis
Kreatif	Menghasilkan gagasan yang orisinal		• Eksplorasi • Mari Berpikir Kreatif
	Menghasilkan karya dan tindakan yang orisinal		• Mari Berpikir Kreatif • Proyek

Dimensi	Elemen	Subelemen	Implementasi
	Memiliki keluwesan berpikir dalam mencari alternatif solusi permasalahan		Mari Berpikir Kreatif

Akhirnya, panduan pembelajaran yang disediakan di dalam buku ini hanyalah sebatas rekomendasi. Bapak/Ibu Gurulah yang memiliki andil besar dalam membentuk peserta didik menjadi pribadi yang utuh—pribadi yang cakap secara matematis, berkarakter kuat, dan berdaya di dalam masyarakat. Untuk itu, Bapak/Ibu Guru perlu belajar praktik-praktik baik pembelajaran terkini, berkolaborasi dengan sesama guru dan para pemangku kepentingan pembelajaran matematika, serta merefleksikan pembelajaran yang telah dilakukan secara terus-menerus untuk mencapai pembelajaran matematika yang efektif. Tak kalah penting, Bapak/Ibu Guru juga perlu berupaya untuk menjadi inspirasi bagi peserta didik dalam hidup bermasyarakat.

B. Capaian Pembelajaran

1. Karakteristik Matematika Tingkat Lanjut Kelas XI

Bapak/Ibu Guru, mata pelajaran Matematika Tingkat Lanjut untuk kelas XI mencakup enam topik matematika. Topik-topik tersebut adalah matriks, polinomial, fungsi trigonometri, vektor, transformasi geometri, serta fungsi dan pemodelannya. Semua topik tersebut merupakan bagian dari elemen aljabar dan fungsi, serta geometri. Topik-topik tersebut tidak berdiri sendiri-sendiri, tetapi saling terkait dengan topik-topik yang telah dipelajari oleh peserta didik pada pengalaman belajar sebelumnya.

Di samping itu, mata pelajaran Matematika Tingkat Lanjut untuk kelas XI perlu mengupayakan pembelajaran yang mendukung peserta didik untuk membangun dan mengembangkan (1) penalaran dan pembuktian matematis, (2) pemecahan masalah matematis, (3) komunikasi, (4) representasi matematis, dan (5) koneksi matematis. Kelima hal tersebut disebut *elemen proses* dalam pembelajaran matematika. Dengan

demikian, Bapak/Ibu Guru tidak hanya perlu mempertimbangkan topik-topik matematikanya saja dalam mendesain, mengimplementasikan, dan mengevaluasi pembelajaran, tetapi juga perlu mempertimbangkan pengembangan kelima elemen proses tersebut.

2. Capaian Pembelajaran Matematika Tingkat Lanjut Fase F

Pada akhir Fase F, peserta didik dapat menyelesaikan masalah terkait polinomial, melakukan operasi aljabar pada matriks dan menerapkannya dalam transformasi geometri. Mereka dapat memodelkan fenomena periodik dengan fungsi trigonometri, dan membuktikan serta menerapkan identitas trigonometri dan aturan cosinus dan sinus. Mereka dapat menyatakan vektor pada bidang datar, melakukan operasi aljabar pada vektor dan menggunakannya pada pembuktian geometris. Mereka dapat mengenal berbagai fungsi (selain fungsi linear dan fungsi kuadrat) dan menggunakannya untuk memodelkan fenomena, serta menyatakan sifat-sifat geometri dengan persamaan pada sistem koordinat. Mereka dapat mengevaluasi hasil keputusan dengan menggunakan distribusi peluang dengan menghitung nilai yang diharapkan, dan juga dapat menerapkan konsep dasar kalkulus di dalam konteks pemecahan masalah aplikasi dalam berbagai bidang.

Capaian Pembelajaran setiap elemen mata pelajaran Matematika Tingkat Lanjut adalah sebagai berikut.

Tabel 2 Capaian Pembelajaran Fase F Berdasarkan Elemen

Elemen	Capaian Pembelajaran
Aljabar dan Fungsi	Peserta didik dapat melakukan operasi aritmetika pada polinomial (suku banyak), menentukan faktor polinomial, dan menggunakan identitas polinomial untuk menyelesaikan masalah. Peserta didik dapat melakukan operasi aljabar pada matriks dan menerapkannya dalam transformasi geometri. Peserta didik dapat menyatakan fungsi trigonometri menggunakan lingkaran satuan, memodelkan fenomena periodik dengan fungsi trigonometri, dan membuktikan serta menerapkan identitas trigonometri dan aturan cosinus dan sinus. Peserta didik dapat mengenal berbagai fungsi (termasuk fungsi rasional, fungsi akar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi <i>piecewise</i> dan menggunakannya untuk memodelkan berbagai fenomena.

Elemen	Capaian Pembelajaran
Geometri	Peserta didik dapat menyatakan vektor pada bidang datar, dan melakukan operasi aljabar pada vektor. Mereka dapat melakukan pembuktian geometris menggunakan vektor. Peserta didik dapat menyatakan sifat-sifat geometri dari persamaan lingkaran, elips, dan persamaan garis singgung.
Analisis Data dan Peluang	Peserta didik memahami variabel diskrit acak dan fungsi peluang, dan menggunakannya dalam memodelkan data. Mereka dapat menginterpretasi parameter distribusi data secara statistik (seragam, binomial dan normal), menghitung nilai harapan distribusi binomial dan normal, dan menggunakannya dalam penyelesaian masalah.
Kalkulus	Peserta didik dapat memahami laju perubahan dan laju perubahan rata-rata, serta laju perubahan sesaat sebagai konsep kunci derivatif (turunan), baik secara geometris maupun aljabar. Mereka dapat menentukan turunan dari fungsi polinomial, eksponensial, dan trigonometri, dan menerapkan derivatif untuk membuat sketsa kurva, menghitung gradien dan menentukan persamaan garis singgung, menentukan kecepatan sesaat dan menyelesaikan soal optimasi. Mereka dapat memahami integral, baik sebagai proses yang merupakan kebalikan dari derivatif dan juga sebagai cara menghitung luas. Mereka memahami teorema dasar kalkulus sebagai penghubung antara derivatif dan integral.

3. Tujuan Pembelajaran

Capaian Pembelajaran Matematika Tingkat Lanjut fase F tersebut ditargetkan untuk kelas XI dan XII. Untuk kelas XI, Capaian Pembelajaran dan tujuannya disajikan pada tabel berikut.

Tabel 3 Pemetaan Capaian Pembelajaran dan Tujuan Pembelajaran

No.	Capaian Pembelajaran	Tujuan Pembelajaran
1.	Peserta didik dapat melakukan operasi aritmetika pada polinomial (suku banyak), menentukan faktor polinomial, dan menggunakan identitas polinomial untuk menyelesaikan masalah.	1.1 Peserta didik dapat menjelaskan definisi polinomial dan fungsi polinomial. 1.2 Peserta didik dapat mengidentifikasi karakteristik polinomial. 1.3 Peserta didik dapat melakukan penjumlahan, pengurangan, dan perkalian terhadap polinomial. 1.4 Peserta didik dapat melakukan pembagian polinomial. 1.5 Peserta didik dapat menggunakan Teorema Sisa. 1.6 Peserta didik dapat melakukan pemfaktoran polinomial. 1.7 Peserta didik dapat menentukan pembuat nol polinomial. 1.8 Peserta didik dapat membuktikan identitas polinomial. 1.9 Peserta didik dapat melakukan pemfaktoran polinomial menggunakan identitas polinomial.
2.	Peserta didik dapat melakukan operasi aljabar pada matriks dan menerapkannya dalam transformasi geometri.	2.1 Peserta didik dapat mengidentifikasi jenis-jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen penyusunnya. 2.2 Peserta didik dapat menentukan matriks transpos. 2.3 Peserta didik dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesamaan dua matriks. 2.4 Peserta didik dapat menjelaskan konsep operasi penjumlahan dan pengurangan dua matriks. 2.5 Peserta didik dapat menjelaskan konsep operasi perkalian skalar dengan matriks dan perkalian dua matriks. 2.6 Peserta didik dapat menentukan determinan matriks berordo 2×2 dan 3×3 . 2.7 Peserta didik dapat menentukan invers matriks. 2.8 Peserta didik dapat membuat model matematika.

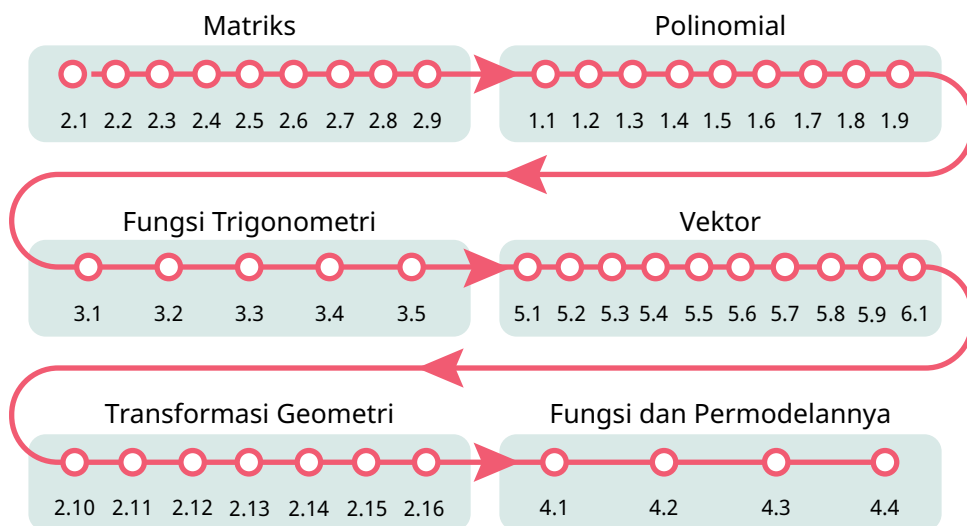
No.	Capaian Pembelajaran	Tujuan Pembelajaran
		2.9 Peserta didik dapat menyelesaikan masalah kontekstual matriks. 2.10 Peserta didik dapat menjelaskan definisi dari beberapa transformasi. 2.11 Peserta didik dapat melakukan berbagai transformasi geometri terhadap bermacam bentuk geometri. 2.12 Peserta didik dapat mengidentifikasi komposisi transformasi geometri. 2.13 Peserta didik dapat menggunakan komposisi transformasi geometri. 2.14 Peserta didik dapat mendeskripsikan transformasi menggunakan koordinat Kartesius dan matriks. 2.15 Peserta didik dapat mengoperasikan komposisi transformasi geometri dengan bantuan matriks yang merepresentasikan transformasi. 2.16 Peserta didik dapat menerapkan transformasi geometri dalam permasalahan nyata.
3.	Peserta didik dapat menyatakan fungsi trigonometri menggunakan lingkaran satuan, memodelkan fenomena periodik dengan fungsi trigonometri, dan membuktikan serta menerapkan identitas trigonometri dan aturan cosinus dan sinus.	3.1 Peserta didik dapat menentukan nilai fungsi trigonometri untuk sembarang bilangan real. 3.2 Peserta didik dapat mensketsa grafik fungsi trigonometri menggunakan transformasi fungsi. 3.3 Peserta didik dapat menginterpretasi grafik fungsi trigonometri menggunakan transformasi fungsi. 3.4 Peserta didik dapat menggunakan identitas-identitas trigonometri dasar untuk membuktikan identitas-identitas trigonometri lainnya, termasuk identitas trigonometri terkait penjumlahan dan pengurangan sudut. 3.5 Peserta didik dapat menyelesaikan permasalahan menggunakan Aturan Sinus dan Aturan Kosinus.

No.	Capaian Pembelajaran	Tujuan Pembelajaran
4.	Peserta didik dapat mengenal berbagai fungsi (termasuk fungsi rasional, fungsi akar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga, dan fungsi <i>piecewise</i>) dan menggunakannya untuk memodelkan berbagai fenomena.	4.1 Peserta didik dapat menentukan nilai fungsi logaritma, fungsi aljabar, dan fungsi non-aljabar. 4.2 Peserta didik dapat menganalisis karakteristik grafik dari fungsi logaritma, fungsi aljabar, dan fungsi non-aljabar. 4.3 Peserta didik dapat memodelkan permasalahan sehari-hari menggunakan fungsi logaritma, fungsi aljabar, dan fungsi non-aljabar. 4.4 Peserta didik dapat menyelesaikan permasalahan sehari-hari menggunakan fungsi logaritma, fungsi aljabar, dan fungsi non-aljabar.
5.	Peserta didik dapat menyatakan vektor pada bidang datar, dan melakukan operasi aljabar pada vektor.	5.1 Peserta didik dapat mengidentifikasi permasalahan sehari-hari yang dapat dijelaskan atau direpresentasikan dengan konsep vektor. 5.2 Peserta didik dapat melakukan operasi-operasi vektor. 5.3 Peserta didik dapat memaknai hasil operasi vektor secara geometris. 5.4 Peserta didik dapat menuliskan sebuah vektor sebagai kombinasi vektor-vektor satuan. 5.5 Peserta didik dapat melakukan operasi hasil kali titik antara dua vektor. 5.6 Peserta didik dapat menggunakan sifat-sifat hasil kali titik antara dua vektor dalam penyelesaian masalah. 5.7 Peserta didik dapat menentukan besar sudut antara dua vektor menggunakan hasil kali titik. 5.8 Peserta didik dapat menentukan proyeksi suatu vektor ke vektor lain. 5.9 Peserta didik dapat menentukan panjang vektor hasil proyeksi suatu vektor ke vektor lain.

No.	Capaian Pembelajaran	Tujuan Pembelajaran
6.	Peserta didik dapat melakukan pembuktian geometris menggunakan vektor.	6.1 Peserta didik dapat membuktikan beberapa teorema geometris menggunakan konsep vektor.

4. Alur Tujuan Pembelajaran

Bapak/Ibu Guru, tujuan pembelajaran pada bagian sebelumnya dapat diurutkan dengan berbagai skenario. Alur tujuan pembelajaran (ATP) yang ditawarkan dalam buku ini (dan Buku Siswa) disajikan pada Gambar 1. Penomoran tujuan pembelajaran pada gambar tersebut mengacu pada penomoran dalam Tabel 3.



Gambar 1 Alur Tujuan Pembelajaran

Perumusan ATP pada Gambar 1 menggunakan beberapa prinsip, misalnya sebagai berikut.

- Kemampuan prasyarat. Dengan prinsip ini, tujuan pembelajaran yang mempersyaratkan tujuan-tujuan lainnya perlu diajarkan terlebih dahulu.
- Kedekatan. Dengan prinsip ini, tujuan pembelajaran yang lebih dekat dengan peserta didik perlu diajarkan terlebih dahulu.

- Kesukaran. Tujuan pembelajaran perlu diurutkan dari yang lebih mudah ke yang lebih sukar untuk dicapai.
- Minat. Tujuan pembelajaran diurutkan mulai dari yang berpotensi menarik minat peserta didik.
- Sejarah. Tujuan pembelajaran diurutkan dari yang terlebih dahulu muncul dalam sejarah.
- Kompleksitas. Tujuan pembelajaran perlu diurutkan dari yang kurang kompleks ke yang lebih kompleks.

Dengan prinsip-prinsip tersebut, Bapak/Ibu Guru dapat mengembangkan ATP sendiri yang sesuai dengan kebutuhan dan konteks peserta didik masing-masing.

C. Strategi Pencapaian Tujuan Pembelajaran

Aktivitas-aktivitas pembelajaran yang disusun dalam buku ini paling tidak didasarkan pada tiga pertimbangan. Setiap pertimbangan tersebut dijelaskan sebagai berikut.

1. Prinsip-Prinsip Desain Pembelajaran

Beberapa prinsip desain pembelajaran digunakan untuk menyusun rancangan kegiatan pembelajaran di dalam buku ini. Prinsip-prinsip tersebut dipilih dengan tujuan mengembangkan kompetensi-kompetensi peserta didik agar mereka dapat berkembang secara utuh dan mencapai Profil Pelajar Pancasila. Setiap prinsip tersebut dideskripsikan sebagai berikut.

a. *Peserta didik adalah Pusat Pembelajaran*

Rancangan pembelajaran yang ditawarkan dalam Buku Panduan Guru ini menggunakan pendekatan pembelajaran yang berpusat kepada peserta didik. Dalam rancangan pembelajaran tersebut, peserta didik difasilitasi untuk terlibat aktif dalam membangun sendiri pengetahuannya. Hal ini diawali dengan pengaktifan pengetahuan dan keterampilan awal peserta didik, kemudian dilanjutkan dengan memfasilitasi peserta didik untuk mengeksplorasi matematika. Kedua hal tersebut dilakukan melalui aktivitas Eksplorasi pada Buku Siswa.

b. *Pemahaman Konseptual Dahulu, Kefasihan Prosedural Kemudian*

Pembelajaran matematika perlu berfokus pada pemahaman konseptual. Artinya, pembelajaran matematika perlu disusun agar dapat memfasilitasi peserta didik untuk memiliki pemahaman konseptual yang kuat. Setelah itu, pembelajaran dapat dilanjutkan ke arah prosedural. Karena alasan ini, urutan penyajian materi di dalam Buku Siswa biasanya dimulai dari aktivitas Eksplorasi, kemudian Contoh dan Mari Mencoba, serta kolom-kolom lain yang berisi permasalahan (seperti Mari Berpikir Kritis, Mari Berpikir Kreatif, Mari Mengomunikasikan, dan Mari Berkolaborasi).

c. *Kompetensi Diperoleh secara Individu dan Kolektif*

Sebagian besar (jika tidak semuanya) aktivitas pembelajaran yang disusun dalam buku ini menggunakan pembelajaran kooperatif. Pembelajaran kooperatif tersebut bisa dimulai dari aktivitas individu atau langsung aktivitas kelompok. Meskipun demikian, ada beberapa waktu ketika peserta didik lebih cocok untuk bekerja mandiri, misalnya saat mengerjakan bagian Mari Mencoba dan soal-soal dalam Latihan.

d. *Dukungan terhadap Peserta Didik yang Beragam*

Peserta didik itu beragam. Oleh karena itu, tidak ada teknik, metode, model, atau strategi pembelajaran yang selalu cocok untuk semua peserta didik. Meskipun demikian, penyusunan Buku Siswa dan Buku Panduan Guru ini telah diupayakan untuk mengakomodasi keberagaman peserta didik tersebut. *Pertama*, jenis-jenis soal dalam Buku Siswa disusun bervariasi agar Bapak/Ibu Guru memiliki keleluasaan untuk memilih soal mana yang cocok dengan peserta didiknya. *Kedua*, aktivitas pembelajaran yang direkomendasikan dalam Buku Panduan Guru ini disusun tidak terlalu spesifik agar dapat memberikan ruang bagi Bapak/Ibu Guru untuk menyesuakannya dengan konteks peserta didik dan konteks lingkungan belajarnya. *Ketiga*, beberapa panduan pembelajaran untuk subbab dalam Buku Panduan Guru ini memiliki alternatif-alternatif pembelajaran yang dapat dipertimbangkan oleh Bapak/Ibu Guru.

2. Siklus Pengajaran

Seperti penjelasan pada bagian sebelumnya, sebagian besar rancangan pembelajaran di dalam buku ini menggunakan pembelajaran kooperatif. Agar pembelajaran kooperatif tersebut betul-betul dapat menciptakan diskusi yang produktif, Bapak/Ibu Guru dapat mengikuti tahapan-tahapan pengajaran yang dipaparkan dalam tabel berikut.

Tabel 4 Siklus Pengajaran

Tahap	Kegiatan	Deskripsi
0	Mengidentifikasi Tujuan	Langkah awal adalah mengidentifikasi tujuan. Bapak/Ibu Guru dapat melihat tujuan pembelajaran per subbab pada bagian Persiapan Pembelajaran.
1	Mengantisipasi	Dalam tahap ini, Bapak/Ibu Guru perlu memeriksa aktivitas-aktivitas pembelajaran yang akan dilakukan peserta didik dan memperkirakan bagaimana peserta didik akan menyelesaikan aktivitas-aktivitas tersebut. Untuk membantu Bapak/Ibu Guru melakukannya, buku ini menyediakan pertanyaan-pertanyaan panduan dalam setiap subbab pada bagian Persiapan Pembelajaran.
2	Memonitor	Tahapan ini dilakukan ketika pembelajaran berlangsung. Pada tahapan ini, Bapak/Ibu Guru dapat berkeliling memantau pekerjaan peserta didik (baik individu maupun berkelompok) dan membuat catatan mengenai pekerjaan peserta didik. Selain itu, Bapak/Ibu Guru juga memberikan bimbingan, arahan, dan topangan yang diperlukan.

Tahap	Kegiatan	Deskripsi
3	Memilih	Pada tahap ini, Bapak/Ibu Guru perlu merefleksikan catatan yang dibuat untuk memilih peserta didik atau kelompok mana yang perlu mempresentasikan hasil pekerjaannya. Ketika memilih peserta didik atau kelompok tersebut, Bapak/Ibu Guru perlu memperhatikan bahwa hasil pekerjaan peserta didik atau kelompok tersebut potensial untuk menciptakan diskusi klasikal yang produktif.
4	Mengurutkan	Setelah Bapak/Ibu Guru memutuskan peserta didik atau kelompok mana yang presentasi, langkah berikutnya adalah menentukan urutan presentasinya. Pengurutan tersebut dapat didasarkan atas banyak hal, misalnya dari strategi yang tidak formal ke yang formal, dari yang sederhana ke yang kompleks, atau dari yang biasa ke yang tidak biasa.
5	Menghubungkan	Pada tahapan terakhir ini, Bapak/Ibu Guru perlu memberikan penegasan dan pembahasan mengenai topik yang telah didiskusikan. Bapak/Ibu Guru dapat menunjukkan hubungan antara sajian presenter satu dan sajian presenter lainnya. Bapak/Ibu Guru juga perlu menegaskan pesan pembelajaran bagi peserta didik dan membahas ide-ide lain yang masih memungkinkan untuk menyelesaikan permasalahan yang diberikan.

3. Siklus Pembelajaran

Meskipun tidak tampak secara jelas, penyajian materi di dalam Buku Siswa dan penyusunan aktivitas pembelajaran di dalam buku ini mengikuti suatu siklus pembelajaran. Siklus pembelajaran tersebut diawali dengan aktivasi pengetahuan awal peserta didik, demonstrasi materi, aplikasi materi, dan integrasi. Siklus ini dilakukan di seputaran permasalahan yang diberikan. Dalam Buku Siswa, permasalahan tersebut pada umumnya diberikan melalui aktivitas Eksplorasi. Selain

itu, pemberian masalah juga dapat berupa pertanyaan-pertanyaan yang memantik pemikiran peserta didik mengenai materi yang akan dipelajari. Tahapan-tahapan dalam siklus pembelajaran tersebut dideskripsikan secara ringkas sebagai berikut.

Tahap 1: Aktivasi

Tujuan tahapan ini adalah menghubungkan pengetahuan awal peserta didik dengan materi yang akan dipelajari. Dalam Buku Siswa, tahapan ini sebagian besar dilakukan melalui aktivitas Eksplorasi. Beberapa kali, tahapan ini juga dilakukan dengan memberikan penjelasan atau pertanyaan yang memantik keingintahuan peserta didik mengenai materi yang akan dibahas.

Tahap 2: Demonstrasi

Pada tahapan ini, peserta didik akan mendapatkan penjelasan atau demonstrasi dari materi yang dibahas. Demonstrasi ini dapat berupa kolom-kolom materi (definisi dan sifat, misalnya) ataupun contoh soal. Pada tahapan ini, pemahaman konseptual peserta didik diharapkan sudah terbentuk.

Tahap 3: Aplikasi

Tidak hanya berhenti pada penjelasan dan demonstrasi materi, agar pembelajarannya optimal, peserta didik perlu mendapatkan kesempatan untuk mengaplikasikan pengetahuannya. Hal ini dilakukan agar peserta didik fasih dalam melakukan prosedur atau menerapkan strategi penyelesaian soal atau masalah matematika. Dalam Buku Siswa, tahapan ketiga ini difasilitasi melalui fitur Mari Mencoba dan fitur-fitur lainnya, seperti Mari Berpikir Kritis dan Mari Berpikir Kreatif.

Tahap 4: Integrasi

Pengalaman belajar peserta didik menjadi bermakna ketika mereka mampu mengintegrasikan pengetahuan dan keterampilan yang diperolehnya untuk menyelesaikan masalah. Dalam Buku Siswa, tahapan ini dapat dilakukan dengan pengerjaan soal-soal dalam Latihan. Dalam buku ini, Bapak/Ibu Guru dapat membaca

bagian Penugasan pada setiap subbabnya untuk melihat panduan bagaimana memfasilitasi peserta didik melakukan integrasi pengetahuan.

D. Asesmen

1. Tujuan Pembelajaran

Terdapat dua jenis tujuan pembelajaran yang dituliskan dalam Buku Panduan Guru ini, yaitu tujuan pembelajaran untuk peserta didik dan guru. Tujuan pembelajaran untuk peserta didik dapat ditemukan pada awal bab Buku Siswa dan pada bagian Pendahuluan di setiap panduan khusus bab dalam buku ini. Tujuan pembelajaran untuk peserta didik tersebut disusun secara ringkas agar mudah dibaca dan dipahami oleh peserta didik.

Tujuan pembelajaran untuk guru dapat ditemukan pada bagian Pendahuluan dalam setiap panduan khusus bab. Tujuan pembelajaran ini dibuat dengan sasaran pembaca guru. Dengan demikian, tujuan pembelajaran tersebut dirumuskan secara rinci agar guru dapat menangkap konten dan aktivitas pembelajaran apa yang akan dilakukan.

2. Penilaian Formatif

Buku Siswa memuat banyak pilihan yang dapat digunakan oleh Bapak/Ibu Guru untuk penilaian formatif. Salah satunya adalah soal-soal Latihan pada setiap subbabnya. Soal-soal tersebut dikategorikan menjadi dua, yaitu Pemahaman Konsep dan Penerapan Konsep. Soal-soal di dalam kategori pertama ditujukan untuk menguji pemahaman peserta didik terhadap fakta-fakta dan konsep-konsep penting dalam subbab. Pada kategori kedua, soal-soalnya ditujukan untuk mengasah kemampuan peserta didik dalam menerapkan dan mengintegrasikan konsep, prinsip, dan prosedur yang dipelajarinya.

Selain Latihan, terdapat beberapa fitur Buku Siswa yang dapat digunakan sebagai penilaian formatif, misalnya Mari Berpikir Kritis, Mari Berpikir Kreatif, Mari Mengomunikasikan, dan Mari

Berkolaborasi. Soal-soal dalam fitur-fitur tersebut disusun tidak hanya untuk memfasilitasi peserta didik dalam mengembangkan kecakapan matematisnya, tetapi juga mempersiapkan mereka hidup pada abad ke-21 dan mengembangkan karakter mereka agar sesuai dengan Profil Pelajar Pancasila.

3. Penilaian Sumatif

Untuk melakukan penilaian sumatif, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan Uji Kompetensi dan Proyek pada setiap akhir bab. Soal-soal dalam Uji Kompetensi memiliki rentang yang beragam, mulai dari Uji Pemahaman, Penerapan, sampai dengan Penalaran. Untuk Proyek, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakannya di dalam pembelajaran berbasis proyek.

4. Penilaian sebagai Aktivitas Belajar

Selain penilaian formatif dan sumatif, Buku Siswa juga memfasilitasi peserta didik untuk belajar selama proses penilaian. Hal ini dapat diterapkan melalui kegiatan Refleksi pada setiap akhir bab. Refleksi tersebut dimaksudkan untuk mengajak peserta didik merenungkan kembali pembelajaran yang telah dilakukannya dan mengevaluasi diri berdasarkan pengalaman tersebut.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2024

Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut (Edisi Revisi)
untuk SMA Kelas XI

Penulis: Yosep Dwi Kristanto, Muhammad Taqiyuddin, Al Azhary Masta, Elyda Yulfiana
ISBN: 978-623-388-339-9

Panduan Khusus **Bab 1 MATRIKS**



Sumber: chase-chappell/unsplash (2021)

A. Pendahuluan

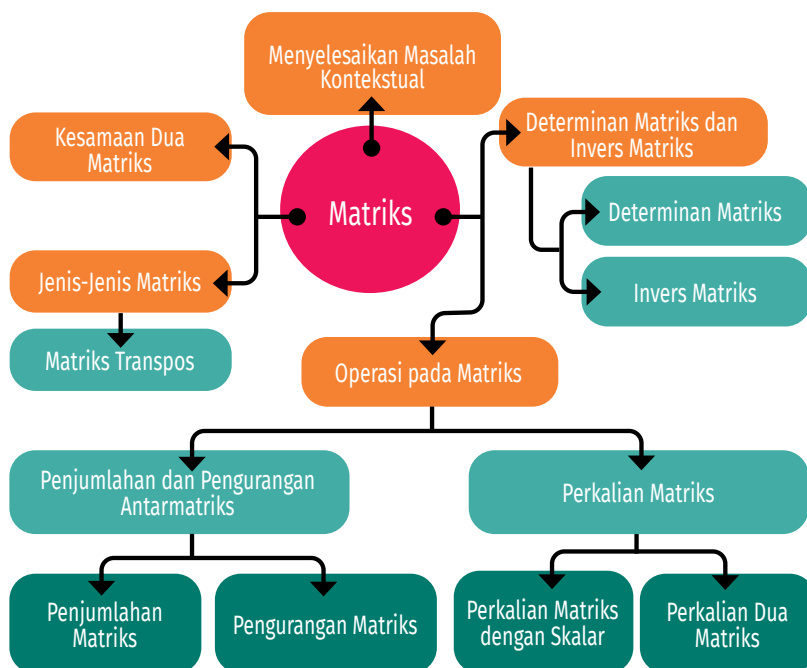
1. Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat mengidentifikasi jenis-jenis matriks, menentukan matriks transpos, menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesamaan dua matriks, menjelaskan konsep operasi penjumlahan dan pengurangan dua matriks, menjelaskan konsep operasi perkalian skalar dengan matriks dan perkalian dua matriks, menentukan determinan matriks dan invers matriks, serta membuat model matematika dan menyelesaikan masalah kontekstual matriks.

Bapak/Ibu Guru dapat menentukan kriteria ketercapaian tujuan pembelajaran (KKTP) Bab 1 dengan mengacu pada kolom Tujuan Pembelajaran dalam **Tabel 3** Pemetaan Capaian Pembelajaran dan Tujuan Pembelajaran pada bagian “Panduan Umum”.

2. Peta Materi

Berikut ini peta materi pembelajaran matriks pada Bab 1 Buku Siswa.



Gambar 1.1 Peta Materi Bab 1 Buku Siswa

3. Saran Durasi Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran bab “Matriks” ini dapat dilaksanakan dalam 30 jam pelajaran (JP) dengan 1 JP = 45 menit. Bapak/Ibu Guru dapat menyesuaikan durasi pembelajaran sesuai dengan kondisi satuan pendidikan tempat mengajar.

B. Materi Prasyarat

Bapak/Ibu Guru dapat mempersiapkan kognisi peserta didik dengan mengidentifikasi materi prasyarat sebelum mempelajari matriks. Materi yang menjadi prasyarat adalah Sistem Persamaan Linear Dua Variabel dan Penyajian Data.

Menyatakan data dalam bentuk matriks terdapat pada Capaian Pembelajaran Fase F yang akan dipelajari pada Matematika kelas XI, kemudian dibahas lebih lanjut pada Matematika Tingkat Lanjut Kelas XI. Sebagai pengenalan, Bapak/Ibu Guru dapat menjelaskan konsep matriks secara singkat berkaitan dengan konten pada Buku Siswa.

C. Apersepsi

Bapak/Ibu Guru dapat mengawali pembelajaran matriks dengan menarik perhatian peserta didik. Salah satu caranya adalah dengan menjelaskan penggunaan matriks dalam kehidupan sehari-hari. Bapak/Ibu Guru dapat mengenalkan teknik kriptografi. Salah satu cara membuat pesan kriptografi adalah menggunakan bentuk matriks. Operasi perkalian dua matriks melibatkan beberapa elemen sekaligus sehingga membuat penyidikan kode sulit dilakukan.

Selain pada kriptografi, matriks juga dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan sehari-hari, seperti dalam bidang ekonomi, konstruksi, industri, jaringan komputer, rangkaian listrik, reaksi kimia, dan pemberian fitur efek filter pada gambar.

D. Penilaian sebelum Pembelajaran

Bapak/Ibu Guru dapat melakukan tes diagnostik untuk mengidentifikasi kemampuan peserta didik terkait materi matriks. Seberapa jauh pengetahuan peserta didik terhadap materi tersebut dapat digunakan

sebagai input yang berharga untuk merencanakan pembelajaran. Materi penyajian data dalam bentuk matriks dan unsur-unsur matriks dapat digunakan sebagai materi tes diagnostik.

E. Panduan Pembelajaran Buku Siswa

Subbab A: Jenis-Jenis Matriks

Aktivitas 1

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat mengidentifikasi jenis-jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen penyusunnya, serta menentukan matriks transpos dari matriks yang diberikan.

Setelah memaparkan definisi matriks dan unsur-unsur matriks kepada peserta didik, Bapak/Ibu Guru dapat menjelaskan jenis-jenis matriks, yaitu matriks baris, matriks kolom, matriks persegi, matriks datar, matriks tegak, matriks segitiga, matriks diagonal, matriks identitas, matriks nol, dan matriks simetris. Untuk melatih penalaran terhadap jenis-jenis matriks tersebut, berikan kesempatan kepada peserta didik untuk membuat matriks dan menentukan jenis matriksnya. Selanjutnya, Bapak/Ibu Guru dapat menjelaskan konsep matriks transpos.

Aktivitas berikutnya, Bapak/Ibu Guru menugaskan peserta didik mencermati Contoh 1.1, kemudian mengajak mereka menerapkan pemahamannya dengan mengerjakan Mari Mencoba 1.1. Setiap soal pada Mari Mencoba Buku Siswa umumnya bersesuaian dengan contohnya.



Mari Mencoba 1.1

Alternatif Penyelesaian

1. Transpos matriks A adalah $A^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$. Jenis matriks A adalah matriks baris karena matriks A memuat satu baris dan tiga elemen.
2. Transpos matriks B adalah $B^t = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Jenis matriks B adalah matriks tegak atau peserta didik boleh menjawab matriks persegi panjang karena baris matriks B lebih banyak daripada kolom matriks B .
3. Transpos matriks C adalah $C^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -7 \end{bmatrix}$. Jenis matriks C adalah matriks persegi karena banyak baris matriks C sama dengan banyak kolom matriks C .

Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik bekerja bersama teman sebangkunya sebagai satu kelompok. Mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi saat mengerjakan kegiatan pada kolom Mari Mengomunikasikan. Pandulah diskusi ini agar Bapak/Ibu Guru dapat menyimpulkan pengetahuan peserta didik tentang jenis-jenis matriks dan matriks transpos.



Mari Mengomunikasikan

Alternatif Penyelesaian

1. Matriks segitiga yang terbentuk dari data pada **Tabel 1.2** adalah sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 27 & 991 & 321 \\ 0 & 375 & 699 \\ 0 & 0 & 2.237 \end{bmatrix}$$

Baris matriks berturut-turut menyatakan lokasi yang mengalami gagal panen, yaitu Ponorogo, Pacitan, dan Malang. Adapun kolom matriks berturut-turut menyatakan penyebab gagal panen, yaitu kekeringan, banjir, dan hama.

2. Transpos dari matriks A adalah matriks A^t .

$$A^t = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 991 & 375 & 0 \\ 321 & 699 & 2.237 \end{bmatrix}$$

Baris matriks berturut-turut menyatakan penyebab gagal panen, yaitu kekeringan, banjir, dan hama. Adapun kolom matriks berturut-turut menyatakan lokasi yang mengalami gagal panen, yaitu Ponorogo, Pacitan, dan Malang.

3. Simpulan yang diperoleh adalah transpos dari matriks segitiga juga merupakan matriks segitiga. Transpos matriks segitiga atas merupakan matriks segitiga bawah.

Subbab B: Kesamaan Dua Matriks

Aktivitas 2

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menjelaskan konsep kesamaan dua matriks dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesamaan dua matriks.

Bapak/Ibu Guru membagi semua peserta didik ke dalam kelompok-kelompok kecil yang memungkinkan mereka dapat belajar secara efektif dan efisien. Beri tahulah bahwa mereka akan menemukan konsep kesamaan dua matriks dan menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan kesamaan dua matriks. Setelah itu, mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi saat mengerjakan Eksplorasi.



Kesamaan Dua Matriks

Alternatif Penyelesaian

Data harga jual kue di Toko A disajikan dalam matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 44.000 & 71.000 & 53.000 \\ 38.000 & 52.000 & 43.000 \\ 33.000 & 45.000 & 38.000 \end{bmatrix}$$

Karena Toko B menjual macam kue, ukuran, dan harga yang sama dengan Toko A, maka data harga jual kue di Toko B dapat disajikan dengan matriks berikut.

$$B = \begin{bmatrix} 44.000 & 71.000 & 53.000 \\ 38.000 & 52.000 & 43.000 \\ 33.000 & 45.000 & 38.000 \end{bmatrix}$$

Matriks A dan matriks B memiliki ordo yang sama yaitu 3×3 . Elemen-elemen seletak matriks A dan matriks B mempunyai nilai yang sama. Jadi, simpulan yang didapatkan adalah dua buah matriks dikatakan sama jika elemen-elemen seletak dari kedua matriks yang berordo sama mempunyai nilai sama.

Bapak/Ibu Guru dapat meminta beberapa kelompok untuk mempresentasikan jawabannya dan memberi kesempatan kepada peserta didik lainnya untuk menanggapi jawaban. Bapak/Ibu Guru memastikan bahwa peserta didik dapat menyimpulkan pengetahuannya tentang kesamaan dua matriks. Gunakan Definisi 1.1 untuk memberikan penegasan terhadap simpulan peserta didik.

Berdasarkan simpulan peserta didik, ajaklah mereka menerapkan pemahamannya tersebut dengan mengerjakan Mari Mencoba 1.2 secara mandiri.

**Alternatif Penyelesaian**

- Matriks A dan matriks B berordo sama, yaitu 2×2 , berarti syarat pertama bagi kesamaan dua matriks telah terpenuhi.
- Syarat kedua kesamaan matriks A dan matriks B adalah setiap elemen yang seletak bernilai sama sehingga

karena $7 = 7c$, maka $c = 1$

karena $-b - 3 = -5c$ dan $c = 1$, maka $b = 2$

karena $b + 3 = 3a - 1$ dan $b = 2$, maka $a = 2$

karena $d - 5 = 2a + 1$ dan $a = 2$, maka $d = 10$

Jadi, nilai $a + b + c + d = 2 + 2 + 1 + 10 = 15$.

Tunjukkan beberapa peserta didik untuk mempresentasikan jawaban. Bapak/Ibu Guru perlu memberikan konfirmasi terhadap jawaban peserta didik.

Subbab C: Penjumlahan dan Pengurangan Dua Matriks**Aktivitas 3****Tujuan Pembelajaran**

Peserta didik dapat menjelaskan konsep operasi penjumlahan matriks.

Bapak/Ibu Guru membagi semua peserta didik ke dalam kelompok-kelompok kecil yang memungkinkan mereka dapat belajar secara efektif dan efisien. Beri tahulah bahwa mereka akan menemukan konsep penjumlahan matriks. Setelah itu, mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi ketika mengerjakan Eksplorasi. Bapak/Ibu Guru memastikan setiap anggota kelompok dapat bekerja sama dalam merumuskan konsep penjumlahan matriks. Pembentukan kelompok dapat dilakukan untuk aktivitas-aktivitas selanjutnya pada subbab ini.



Penjumlahan Matriks

Alternatif Penyelesaian

1. Misalkan data biaya bahan dasar menjadi matriks A dan biaya tenaga kerja menjadi matriks B sehingga diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} 23 & 45 & 82 \\ 16 & 32 & 60 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 15 \\ 6 & 8 & 14 \end{bmatrix}$$

2. Biaya produksi dinyatakan ke dalam matriks dengan menjumlahkan matriks A dan matriks B .

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 23 & 45 & 82 \\ 16 & 32 & 60 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 10 & 15 \\ 6 & 8 & 14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 23+8 & 45+10 & 82+15 \\ 16+6 & 32+8 & 60+14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 31 & 55 & 97 \\ 22 & 40 & 74 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Interpretasi setiap elemen matriks biaya produksi adalah sebagai berikut.

Biaya produksi batik *handprint* kualitas I = Rp31.000.000,00

Biaya produksi batik cap kualitas I = Rp55.000.000,00

Biaya produksi batik tulis kualitas I = Rp97.000.000,00

Biaya produksi batik *handprint* kualitas II = Rp22.000.000,00

Biaya produksi batik cap kualitas II = Rp40.000.000,00

Biaya produksi batik tulis kualitas II = Rp74.000.000,00

4. Apabila biaya bahan dasar batik tulis dihapus, matriks biaya produksi tidak dapat dihitung.

Simpulan dari permasalahan di atas ialah penjumlahan kedua matriks dapat dilakukan karena kedua matriks berordo sama. Apabila ordo kedua matriks berbeda, penjumlahan matriks tidak dapat dilakukan. Penjumlahan matriks A dan matriks B diselesaikan dengan menjumlahkan antareleman kedua matriks yang seletak.

Bapak/Ibu Guru dapat meminta beberapa kelompok untuk berbagi hasil diskusinya. Berikan kesempatan kepada peserta didik lain untuk menanggapi jawaban dari kelompok presenter. Pandulah diskusi ini hingga mereka dapat menyimpulkan penjumlahan matriks dengan tepat. Gunakan Definisi 1.2 untuk memberikan penegasan terhadap kesimpulan peserta didik.

Bapak/Ibu Guru dapat menugaskan peserta didik mencermati Contoh 1.3, kemudian menerapkan pemahamannya mengenai penjumlahan matriks dengan mengerjakan Mari Mencoba 1.3.



Mari Mencoba 1.3

Alternatif Penyelesaian

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1+2 & 2+7 & 1+0 \\ 3+3 & 6+7 & 9+1 \\ 2+5 & 5+(-6) & -7+9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+2 & 2+7 & 1+0 \\ 3+3 & 6+7 & 9+1 \\ 2+5 & 5+(-6) & -7+9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 6 & 13 & 10 \\ 7 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aktivitas 4

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menentukan sifat-sifat operasi penjumlahan matriks.

Bapak/Ibu Guru mengajak setiap kelompok untuk berdiskusi saat mengerjakan Eksplorasi.



Sifat-Sifat Penjumlahan Matriks

Alternatif Penyelesaian

$$1. \quad A + B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2 & 1+(-3) \\ 1+1 & 3+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 & -3+1 \\ 1+1 & -1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena matriks $A + B$ sama dengan matriks $B + A$, maka penjumlahan matriks bersifat komutatif.

$$\begin{aligned} 2. \quad (A + B) + C &= \left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Karena matriks $(A + B) + C$ sama dengan matriks $A + (B + C)$, maka penjumlahan matriks bersifat asosiatif.

$$3. \quad A + O = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 & 1+0 \\ 1+0 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$O + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+4 & 0+1 \\ 0+1 & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

terdapat matriks O yang bersifat $A + O = O + A = A$.

$$4. \quad A + (-A) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+(-4) & 1+(-1) \\ 1+(-1) & 3+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena hasil penjumlahan matriks A dan lawan dari matriks A adalah matriks nol, maka penjumlahan matriks bersifat $A + (-A) = O$.

Bapak/Ibu Guru memandu diskusi agar dapat menyimpulkan pengetahuan peserta didik tentang sifat-sifat penjumlahan matriks dengan tepat. Gunakan Sifat 1.1 untuk memberikan penegasan terhadap kesimpulan peserta didik.

Aktivitas 5

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menjelaskan konsep operasi pengurangan matriks.

Bapak/Ibu Guru memberi penjelasan kepada peserta didik bahwa rumusan penjumlahan matriks dapat diterapkan untuk memahami konsep pengurangan matriks, kemudian menyampaikan Definisi 1.3.

Untuk menerapkan pemahaman setiap peserta didik mengenai pengurangan matriks, Bapak/Ibu Guru dapat meminta mereka mengerjakan Mari Mencoba 1.4 dan Mari Mencoba 1.5 setelah mempelajari Contoh 1.4 dan Contoh 1.5.



Mari Mencoba 1.4

Alternatif Penyelesaian

$$Q = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ maka } -Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P - Q = P + (-Q)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+3 & 0+1 & 3+(-3) \\ 1+(-4) & -2+(-2) & -5+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi, } P - Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$



Mari Mencoba 1.5

Alternatif Penyelesaian

$$X + P = Q \text{ maka } X = Q - P$$

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 - (-7) & -3 - 1 & 4 - 9 \\ 1 - 3 & 2 - 0 & 2 - (-1) \\ 5 - 1 & -5 - 0 & 1 - 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -4 & -5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, matriks } X \text{ adalah } \begin{bmatrix} 6 & -4 & -5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bapak Ibu/Guru dapat menggunakan fitur Mari Berpikir Kritis. Fitur ini menguji penalaran peserta didik dalam menyelesaikan masalah sehingga tercipta pemahaman yang komprehensif tentang pengurangan matriks.



Mari Berpikir Kritis

Alternatif Penyelesaian

Bapak/Ibu Guru dapat memisalkan matriks-matriks pada Eksplorasi halaman 15 Buku Siswa, kemudian meminta peserta didik mengerjakan langkah-langkahnya dengan mengganti bentuk perhitungannya menjadi pengurangan matriks.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$1. \quad A - B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 2 & 1 - (-3) \\ 1 - 1 & 3 - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 4 & -3 - 1 \\ 1 - 1 & -1 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Karena matriks $A - B$ tidak sama dengan matriks $B - A$, maka sifat komutatif tidak berlaku pada pengurangan matriks.

$$\begin{aligned} 2. (A - B) - C &= \left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - (B - C) &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Karena matriks $(A - B) - C$ tidak sama dengan matriks $A - (B - C)$, maka sifat asosiatif tidak berlaku pada pengurangan matriks.

$$\begin{aligned} 3. A - O &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-0 & 1-0 \\ 1-0 & 3-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ O - A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-4 & 0-1 \\ 0-1 & 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matriks $A - O \neq O - A$.

4. Misalkan matriks D merupakan lawan dari matriks A , maka

$$A - D = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - (-4) & 1 - (-1) \\ 1 - (-1) & 3 - (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Hasil pengurangan matriks A dan lawan dari matriks A bukan matriks nol.

Simpulan yang diperoleh adalah sifat-sifat operasi penjumlahan matriks pada Sifat 1.1 tidak berlaku pada operasi pengurangan matriks.

Pada bagian akhir aktivitas pembelajaran ini terdapat kolom Matematika dan Sains. Mintalah peserta didik untuk membacanya agar wawasan tentang perubahan iklim bertambah, kemudian mengerjakan soal pada fitur tersebut.



Visualisasi Data Perubahan Iklim

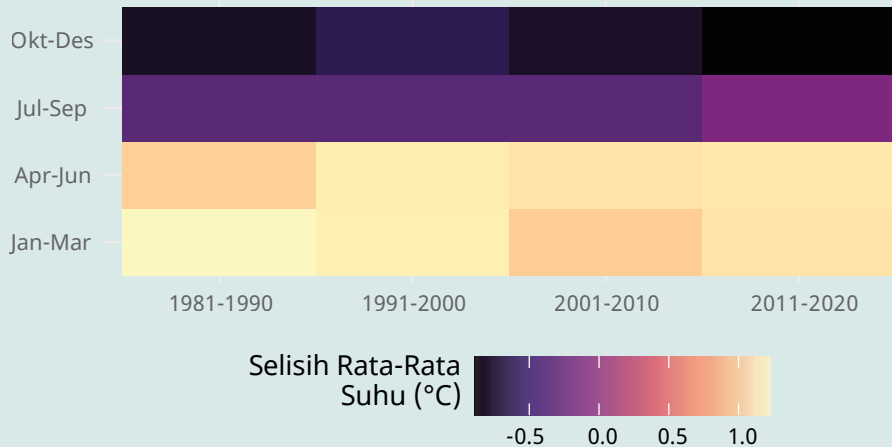
Alternatif Penyelesaian

Misalkan $P = T_{\text{Jayapura}} - T_{\text{Surabaya}}$, maka

$$P = \begin{bmatrix} 26,67 & 26,81 & 27,08 & 27,08 \\ 26,47 & 26,56 & 26,65 & 26,69 \\ 26,71 & 26,72 & 26,89 & 26,99 \\ 26,33 & 26,46 & 26,51 & 26,68 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 27,44 & 27,39 & 27,83 & 27,97 \\ 26,79 & 26,88 & 26,96 & 26,81 \\ 25,70 & 25,57 & 25,79 & 25,86 \\ 25,10 & 25,30 & 25,50 & 25,58 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0,77 & -0,58 & -0,75 & -0,89 \\ -0,32 & -0,32 & -0,31 & -0,12 \\ 1,01 & 1,15 & 1,10 & 1,13 \\ 1,23 & 1,16 & 1,01 & 1,10 \end{bmatrix}$$

Kita dapat membandingkan matriks P dengan gambar berikut.



Gambar 1.2 Selisih Rata-Rata Suhu Jayapura dan Surabaya

Sumber: Data NASA POWER (power.larc.nasa.gov)

Elemen P_{14} mempunyai suhu paling rendah sehingga berwarna paling gelap pada gambar. Elemen P_{41} mempunyai suhu paling tinggi sehingga berwarna paling terang pada gambar.

Subbab D: Perkalian Matriks

Aktivitas 6

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menjelaskan konsep perkalian matriks dengan skalar dan memahami sifat-sifat perkalian matriks dengan skalar.

Bapak/Ibu Guru mengajak semua peserta didik untuk membentuk kelompok-kelompok kecil yang memungkinkan mereka dapat belajar secara efektif dan efisien. Beri tahulah bahwa mereka akan menemukan konsep perkalian matriks dengan skalar. Setelah itu, mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi saat mengerjakan Eksplorasi: Perkalian Matriks dengan Skalar.

Bapak/Ibu Guru memastikan setiap anggota kelompok dapat bekerja sama dalam merumuskan konsep perkalian matriks dengan skalar. Pembentukan kelompok dapat dilakukan untuk aktivitas selanjutnya pada subbab ini.



Eksplorasi

Perkalian Matriks dengan Skalar

Alternatif Penyelesaian

Dengan aturan penjumlahan matriks diperoleh

$$\begin{aligned} A + A &= \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9+9 & 7+7 \\ 3+3 & 1+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \times 9 & 2 \times 7 \\ 2 \times 3 & 2 \times 1 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 2A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A + A + A &= \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 9+9+9 & 7+7+7 \\ 3+3+3 & 1+1+1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3 \times 9 & 3 \times 7 \\ 3 \times 3 & 3 \times 1 \end{bmatrix} \\
 &= 3 \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= 3A
 \end{aligned}$$

Apabila penjumlahan matriks A sampai k kali, maka diperoleh $\underbrace{A + A + A + \dots + A}_{k \text{ kali penjumlahan matriks } A} = kA$.

Dari langkah-langkah tersebut, perkalian matriks dengan skalar dapat diperoleh dengan mengalikan setiap elemen pada matriks A dengan k .

Bapak/Ibu Guru dapat meminta beberapa kelompok mempresentasikan jawabannya dan memberi kesempatan kepada peserta didik lain untuk menanggapi jawaban. Pandulah diskusi ini agar dapat menyimpulkan pengetahuan peserta didik tentang perkalian matriks dengan skalar. Gunakan Definisi 1.5 untuk memberikan penegasan terhadap simpulan peserta didik.

Bapak/Ibu Guru dapat menugaskan setiap peserta didik mencermati Contoh 1.6, kemudian mengerjakan Mari Mencoba 1.6 secara mandiri pada selembar kertas. Kumpulkan jawaban mereka sebagai penilaian kuis.



Mari Mencoba 1.6

Alternatif Penyelesaian

$$kQ = 4 \times \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \times 2 & 4 \times \frac{1}{4} & 4 \times (-\frac{1}{2}) \\ 4 \times 1 & 4 \times \frac{1}{2} & 4 \times \frac{3}{4} \\ 4 \times 3 & 4 \times 8 & 4 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 12 & 32 & 4 \end{bmatrix}$$

Bapak/Ibu Guru memberi penjelasan kepada peserta didik tentang sifat-sifat perkalian matriks dengan skalar (Sifat 1.2 pada Buku Siswa).

Aktivitas 7

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik diharapkan dapat menjelaskan konsep perkalian dua matriks, memahami sifat-sifatnya, dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perkalian dua matriks.

Bapak/Ibu Guru mengajak setiap kelompok untuk berdiskusi saat mengerjakan Eksplorasi.



Eksplorasi

Perkalian Dua Matriks

Alternatif Penyelesaian

Misalkan data banyak karyawan menjadi matriks A dan besar gaji karyawan (dalam ribu rupiah) menjadi matriks B .

$$A = \begin{bmatrix} 450 & 120 \\ 380 & 140 \\ 420 & 87 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 125 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Dana yang harus dikeluarkan perusahaan tersebut dinyatakan dalam matriks dengan mengalikan matriks A dan matriks B .

$$AB = \begin{bmatrix} 450 & 120 \\ 380 & 140 \\ 420 & 87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 125 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450 \times 125 + 120 \times 80 \\ 380 \times 125 + 140 \times 80 \\ 420 \times 125 + 87 \times 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65.850 \\ 58.700 \\ 59.460 \end{bmatrix}$$

1. Interpretasi dari hasil perkalian dua matriks di atas adalah dana yang harus dikeluarkan perusahaan per hari pada setiap lokasi sebagai berikut.

Dana untuk karyawan di Kota Pontianak sebesar Rp65.850.000,00.

Dana untuk karyawan di Kota Surabaya sebesar Rp58.700.000,00.

Dana untuk karyawan di Kota Makassar sebesar Rp 59.460.000,00.

2. Matriks A berordo 3×2 , matriks B berordo 2×1 , dan matriks AB berordo 3×1 . Perkalian matriks A dengan matriks B dapat dilakukan apabila banyak kolom pada matriks A sama dengan

banyak baris pada matriks B . Hasil perkaliannya adalah sebuah matriks dengan baris sebanyak baris matriks A dan kolom sebanyak kolom matriks B .

3. Apabila salah satu kolom pada matriks A dihilangkan, perkalian matriks A dengan matriks B tidak dapat dilakukan. Hal ini karena terdapat elemen baris matriks B yang tidak memiliki pasangan dengan elemen kolom matriks A .
4. Dari permasalahan tersebut, simpulan yang dapat diperoleh adalah jika matriks A adalah matriks berordo $m \times n$ dan matriks B adalah matriks berordo $n \times p$, hasil matriks AB berordo $m \times p$. Perkalian matriks A dengan matriks B dapat dilakukan apabila banyak kolom pada matriks A sama dengan banyak baris pada matriks B . Elemen-elemen pada matriks AB dapat diperoleh dengan cara mengalikan elemen baris ke- i pada matriks A terhadap elemen kolom ke- j pada matriks B , kemudian hasilnya ditambahkan. Setiap elemen baris matriks A berkorespondensi satu-satu dengan setiap elemen kolom matriks B .

Bapak/Ibu Guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan jawabannya dan meminta peserta didik lainnya untuk menanggapi jawaban dari kelompok presenter. Pandulah diskusi ini agar dapat menyimpulkan pengetahuan mereka tentang perkalian dua matriks dengan tepat. Gunakan Definisi 1.6 untuk memberikan penegasan terhadap simpulan peserta didik.

Bapak/Ibu Guru dapat menugaskan peserta didik mencermati Contoh 1.7. Ajaklah peserta didik menerapkan pemahamannya mengenai perkalian matriks dengan mengerjakan Mari Mencoba 1.7.



Mari Mencoba 1.7

Alternatif Penyelesaian

Matriks CD tidak dapat dikerjakan karena banyak kolom pada matriks C tidak sama dengan banyak baris pada matriks D , tetapi

matriks DC dapat ditentukan karena banyak kolom pada matriks D sama dengan banyak baris pada matriks C .

$$\begin{aligned} DC &= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + (-4) \times 1 & 1 \times (-3) + (-4) \times 2 & 1 \times 3 + (-4) \times 2 \\ 8 \times 1 + 2 \times 1 & 8 \times (-3) + 2 \times 2 & 8 \times 3 + 2 \times 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -11 & -5 \\ 10 & -20 & 28 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Selain kegiatan Mari Mencoba, Bapak/Ibu Guru juga dapat menggunakan fitur Mari Berpikir Kritis untuk melatih penalaran para peserta didik dalam menyelesaikan masalah. Dengan demikian, mereka memiliki pemahaman yang komprehensif tentang perkalian dua matriks.



Mari Berpikir Kritis

Alternatif Penyelesaian

$$\begin{aligned} 1. \quad PQ &= \begin{bmatrix} 15 & 12 & 20 \\ 25 & 10 & 15 \\ 15 & 15 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.000 \\ 15.000 \\ 30.000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15 \times 20.000 + 12 \times 15.000 + 20 \times 30.000 \\ 25 \times 20.000 + 10 \times 15.000 + 15 \times 30.000 \\ 15 \times 20.000 + 15 \times 15.000 + 20 \times 30.000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.080.000 \\ 1.100.000 \\ 1.125.000 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Matriks PQ bukan merupakan matriks pendapatan untuk setiap tempat. Solusi agar menemukan matriks pendapatan yang tepat adalah menentukan matriks P^tQ , dengan P^t merupakan transpos dari matriks P .

$$P^t = \begin{bmatrix} 15 & 25 & 15 \\ 12 & 10 & 15 \\ 20 & 15 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 P^tQ &= \begin{bmatrix} 15 & 25 & 15 \\ 12 & 10 & 15 \\ 20 & 15 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.000 \\ 15.000 \\ 30.000 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 15 \times 20.000 + 25 \times 15.000 + 15 \times 30.000 \\ 12 \times 20.000 + 10 \times 15.000 + 15 \times 30.000 \\ 20 \times 20.000 + 15 \times 15.000 + 20 \times 30.000 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1.125.000 \\ 840.000 \\ 1.225.000 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Interpretasi dari matriks P^tQ adalah sebagai berikut.

- Pendapatan dari hasil penjualan keripik di tempat A sebesar Rp1.125.000,00.
- Pendapatan dari hasil penjualan keripik di tempat B sebesar Rp840.000,00.
- Pendapatan dari hasil penjualan keripik di tempat C sebesar Rp1.225.000,00.

Bapak/Ibu Guru memberi penjelasan kepada para peserta didik tentang sifat-sifat perkalian dua matriks pada kolom Sifat 1.3 di Buku Siswa, kemudian mengajak mereka untuk mendiskusikan permasalahan pada fitur Mari Berpikir Kritis.



Mari Berpikir Kritis

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Contoh 1.7, dapat disimpulkan bahwa pada umumnya perkalian matriks tidak bersifat komutatif, kecuali untuk:

- $AI = IA = A$ dan I merupakan matriks identitas berordo sama dengan matriks persegi A ;
- $AO = OA = O$ dan O merupakan matriks nol berordo sama dengan matriks persegi A .

Bagian akhir aktivitas pembelajaran ini adalah Matematika dan Sains. Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik untuk membacanya setelah memindai melalui kode respons cepat agar wawasan bertambah, kemudian mengerjakan soal pada fitur tersebut.



Matematika dan Sains

Penggunaan Matriks dalam Pemberian Fitur Efek Filter pada Gambar Alternatif Penyelesaian

$$\begin{aligned}V &= (32 + 183 + 178 + 64 + 54 + 171 + 31 + 47 + 176) : 9 \\&= 936 : 9 \\&= 104\end{aligned}$$

Jadi, matriks gambar yang diberi efek buram adalah $\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & 104 & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$.

Subbab E: Determinan Matriks dan Invers Matriks

Aktivitas 8

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menentukan determinan matriks berordo 2×2 dan 3×3 .

Bapak/Ibu Guru memberi penjelasan kepada peserta didik bahwa penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) berkaitan dengan konsep determinan matriks berordo 2×2 , kemudian memaparkan Definisi 1.7. Ungkapkan bahwa SPLDV dapat disajikan dalam bentuk matriks menggunakan konsep perkalian dua matriks. Ajaklah peserta didik memahami penyelesaian dari SPLDV menggunakan determinan matriks dan mencermati Contoh 1.8.

Bapak/Ibu Guru dapat mengajak semua peserta didik untuk membentuk kelompok kecil yang memungkinkan mereka dapat belajar secara efektif dan efisien. Mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi saat mengerjakan soal pada Mari Mencoba 1.8.



Alternatif Penyelesaian

$$1. \quad \det M = \begin{vmatrix} 9 & x \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = 9 \times (-7) - 8x = -63 - 8x$$

Karena $\det M = 9$, maka

$$-63 - 8x = 9$$

$$-8x = 72$$

$$x = -9$$

Jadi, nilai x adalah -9 .

2. Bentuk matriks dari SPLDV pada soal:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Nilai x dan y adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -10 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(8 \times 3) - (-10 \times (-1))}{(2 \times 3) - (1 \times (-1))} \\ &= \frac{24 - 10}{6 + 1} \\ &= \frac{14}{7} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(2 \times (-10)) - (1 \times 8)}{(2 \times 3) - (1 \times (-1))} \\ &= \frac{-20 - 8}{6 + 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{-28}{7}$$

$$= -4$$

Jadi, himpunan penyelesaian sistem persamaan linear $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ x + 3y = -10 \end{cases}$ adalah himpunan yang memuat pasangan berurutan $(2, -4)$.

Bapak/Ibu Guru memberi penjelasan kepada peserta didik tentang cara menentukan determinan matriks berordo 3×3 menggunakan Metode Sarrus dan Metode Ekspansi Kofaktor, kemudian memaparkan cara menentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel menggunakan determinan matriks. Bapak/Ibu Guru dapat memberikan penegasan bahwa Metode Sarrus hanya dapat digunakan untuk menentukan determinan matriks berordo 3×3 , sedangkan Metode Ekspansi Kofaktor digunakan untuk menentukan determinan matriks berordo lebih dari 2×2 . Mintalah peserta didik mengerjakan soal Mari Mencoba 1.9 setelah mempelajari Contoh 1.9.



Mari Mencoba 1.9

Alternatif Penyelesaian

1. Determinan matriks R dengan Metode Sarrus.

$$\begin{aligned}
 |R| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & 2 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &\quad \begin{matrix} (-6)(2)(8) \\ (-1)(-8)(-12) \end{matrix} \\
 &= -1 + (-8) + (-12) - (-6) - 2 - 8 \\
 &= -25
 \end{aligned}$$

2. Determinan matriks R dengan Metode Ekspansi Kofaktor kolom ketiga.

$$|R| = 3 \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3(-4 \times 1 - 2 \times (-1)) - 2(1 \times 1 - (2 \times (-2))) + 1(1 \times (-1) - (-4 \times (-2))) \\
 &= -6 - 10 - 9 \\
 &= -25
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, setiap kelompok diminta untuk berdiskusi saat mengerjakan Eksplorasi.



Eksplorasi

Sifat Determinan Matriks

Alternatif Penyelesaian

$$1. \quad |A| = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \times (-3) - 1 \times 2 = 15 - 2 = 13$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 9 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 9 \times (-1) - 1 \times (-4) = -9 + 4 = -5$$

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -5(9) + 2(1) & -5(-4) + 2(-1) \\ 1(9) + (-3)(1) & 1(-4) + (-3)(-1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -43 & 18 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$2. \quad |A| |B| = 13 \times (-5) = -65$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} -43 & 18 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -43 \times (-1) - 6 \times 18 = -65$$

Jadi, determinan matriks bersifat $|A| |B| = |AB|$.

Pandulah diskusi agar peserta didik dapat menyimpulkan sifat determinan matriks dengan tepat. Gunakan Sifat 1.4 untuk memberikan penegasan terhadap simpulan peserta didik. Selanjutnya, mintalah peserta didik untuk mengerjakan Mari Berpikir Kreatif.

Aktivitas 9

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik diharapkan dapat menentukan invers matriks berordo 2×2 dan 3×3 , serta memahami sifat invers matriks.

Bapak/Ibu Guru memberi penjelasan kepada peserta didik tentang invers matriks berordo 2×2 dan 3×3 , kemudian meminta peserta didik mencermati Contoh 1.10 dan Contoh 1.11. Selanjutnya, ajaklah peserta didik menerapkan pemahamannya mengenai invers matriks dengan meminta setiap kelompok untuk berdiskusi saat mengerjakan soal Mari Mencoba 1.10 dan Mari Mencoba 1.11 yang bersesuaian dengan contoh-contoh tersebut.



Mari Mencoba 1.10

Alternatif Penyelesaian

Diketahui $X = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ dan $Y = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ sehingga

$$|X| = 1(4) - (-1)(-3) = 4 - 3 = 1$$

$$|Y| = -4(-2) - (3)(2) = 8 - 6 = 2$$

$$X^{-1} = \frac{1}{|X|} \text{Adjoin}(X) = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y^{-1} = \frac{1}{|Y|} \text{Adjoin}(Y) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1} + Y^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi, } X^{-1} + Y^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

$$X + Y = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|X + Y| = -3(2) - (2)(-1) = -6 + 2 = -4$$

$$(X + Y)^{-1} = \frac{1}{|X + Y|} \text{Adjoin}(X + Y) = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Jadi, matriks $X^{-1} + Y^{-1}$ tidak sama dengan matriks $(X + Y)^{-1}$.



Alternatif Penyelesaian

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 9 + 0 + 0 - 12 + 1$$

$$= -2$$

$$K(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 10 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adjoin}(A) = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 10 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi, } A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 10 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -5 & -2 & -6 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, Bapak/Ibu Guru menugaskan setiap kelompok untuk berdiskusi saat mengerjakan Eksplorasi.



Eksplorasi

Sifat Invers Matriks

Alternatif Penyelesaian

Diketahui sistem persamaan linear dua variabel berikut.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

1. Bentuk matriks: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

Misalkan $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, maka sistem persamaan linear $AX = B$ dapat ditentukan penyelesaiannya dengan $X = A^{-1}B$.

Antisipasi Miskonsepsi

Miskonsepsi dapat terjadi pada nomor 2, yaitu peserta didik menjawab $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}$. Jawaban tersebut menyebabkan operasi perkalian matriks tidak dapat dilakukan. Untuk mengatasi miskonsepsi tersebut, Bapak/Ibu Guru memberi penegasan bahwa ketika mengalikan kedua ruas dengan $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}$, peserta didik harus mengingat konsep perkalian matriks.

Untuk memperoleh simpulan, Bapak/Ibu Guru dapat melakukan kegiatan yang sama seperti penarikan simpulan pada aktivitas sebelumnya. Gunakan Sifat 1.5 untuk memberikan penegasan terhadap simpulan peserta didik.

F. Tindak Lanjut

Bapak/Ibu Guru menugaskan peserta didik untuk mengerjakan soal latihan pada setiap subbab sehingga mengetahui ketercapaian tujuan pembelajaran. Bagi peserta didik yang kesulitan memahami materi matriks, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan strategi pembelajaran yang berbeda dengan pembelajaran sebelumnya. Selain itu, Bapak/

Ibu Guru dapat memberikan latihan soal yang mempunyai tingkat kesulitan sama dengan contoh soal.

Bapak/Ibu Guru juga dapat memberikan pengayaan kepada peserta didik yang sudah mencapai tujuan pembelajaran. Pengayaan berupa penjelasan cara menentukan invers matriks dengan metode operasi baris elementer.

G. Asesmen Sumatif

Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan soal-soal Uji Kompetensi dan Proyek pada Buku Siswa sebagai asesmen sumatif. Bapak/Ibu Guru dapat mendesain rubrik penilaian secara mandiri dan sesuai dengan kebutuhan. Dalam mendesain rubrik tersebut, Bapak/Ibu Guru dapat mengacu pada bagian Kunci Jawaban.

H. Kunci Jawaban

1. Latihan A Jenis-Jenis Matriks

Alternatif Penyelesaian

1. Benar.
2. Salah. Karena matriks segitiga adalah matriks persegi dengan setiap elemen matriks yang berada di bawah diagonal utama atau di atas diagonal utama bernilai nol.
3. Salah. Karena matriks identitas adalah matriks persegi dengan elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai satu dan elemen lain nol. Matriks simetris belum tentu matriks identitas.
4. Benar.
5.
 - a. Matriks A adalah matriks datar atau peserta didik boleh menjawab matriks persegi panjang.
 - b. Matriks B adalah matriks segitiga atas atau peserta didik boleh menjawab matriks persegi.
 - c. Matriks C adalah matriks diagonal atau peserta didik boleh menjawab matriks persegi.

6. $A^t = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -1 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Jenis matriks A dan jenis matriks A^t adalah matriks simetris (peserta didik dapat menjawab matriks persegi).

7. Diketahui $I_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$. Jelas bahwa semua elemen matriks

I bernilai nol, kecuali elemen-elemen yang terletak pada diagonal utama. Jadi, matriks I disebut matriks diagonal, tetapi matriks diagonal belum tentu dapat disebut matriks identitas.

8. Matriks dari data perkiraan kebutuhan minimal energi pada atlet renang putra adalah sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 2.000 & 2.200 & 2.500 \\ 2.200 & 2.500 & 3.000 \\ 2.600 & 2.900 & 3.200 \\ 2.700 & 3.000 & 3.300 \end{bmatrix}$$

Matriks A merupakan matriks tegak atau matriks persegi panjang.

2. Latihan B Kesamaan Dua Matriks

Alternatif Penyelesaian

1. Benar.
2. Benar.
3. Salah. Ordo matriks R dan matriks C tidak sama.
4. Diketahui $A = \begin{bmatrix} -x-3y & 0 \\ (x-2y)^2 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dan $A = I$.

Matriks A dan I berordo sama yaitu 2×2 , berarti syarat pertama bagi kesamaan dua matriks telah terpenuhi. Syarat kedua kesamaan matriks A dan I adalah setiap elemen yang seletak bernilai sama sehingga

$$-x - 3y = 1 \text{ maka } x = -3y - 1 \quad \text{persamaan 1}$$

$$(x - 2y)^2 = 0 \quad \text{persamaan 2}$$

Substitusikan $x = -3y - 1$ ke persamaan 2.

Diperoleh $y = -\frac{1}{5}$

Substitusikan nilai y ke persamaan 1.

$$x = -3y - 1 = -3\left(-\frac{1}{5}\right) - 1 = -\frac{2}{5}$$

$$\text{Jadi, nilai } x + y = -\frac{2}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{3}{5}.$$

5. Matriks berordo sama yaitu 2×2 , berarti syarat pertama bagi kesamaan dua matriks telah terpenuhi. Syarat kedua adalah setiap elemen yang seletak bernilai sama sehingga diperoleh

$$a + 2b = 3 \quad \text{persamaan 1}$$

$$2a + b = -3 \quad \text{persamaan 2}$$

$$c + d = 7 \quad \text{persamaan 3}$$

$$2c + d = 1 \quad \text{persamaan 4}$$

Untuk memperoleh nilai a dan b , kita dapat menggunakan metode eliminasi dan substitusi pada persamaan 1 dan 2. Untuk mengeliminasi variabel a , kalikan persamaan 1 dengan 2, kemudian kurangkan kedua persamaan tersebut.

$$\begin{array}{rcl} a + 2b = 3 & \left| \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 1 \end{array} \right| & \begin{array}{l} 2a + 4b = 6 \\ 2a + b = -3 \end{array} \\ 2a + b = -3 & & \hline & & 3b = 9 \\ & & b = 3 \end{array}$$

Substitusikan nilai b ke persamaan 1 sehingga diperoleh $a = -3$.

Untuk memperoleh nilai c dan d , kita dapat menggunakan metode eliminasi dan substitusi pada persamaan 3 dan 4. Untuk mengeliminasi variabel d , kurangkan kedua persamaan tersebut.

$$\begin{array}{rcl} c + d & = & 7 \\ 2c + d & = & 1 \\ \hline -c & = & 6 \\ c & = & -6 \end{array}$$

Substitusikan nilai c ke persamaan 3 sehingga diperoleh $d = 13$.

Jadi, nilai $a + b + c + d = -3 + 3 + (-6) + 13 = 7$.

6. Diketahui matriks

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + 10 \\ x_1 + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 45 \\ 55 \end{bmatrix}$$

Matriks berordo sama yaitu 4×1 , berarti syarat pertama bagi kesamaan dua matriks telah terpenuhi. Syarat kedua adalah setiap elemen yang seletak bernilai sama sehingga

- $x_3 + 10 = 45$ maka $x_3 = 35$
- $x_1 + 10 = 55$ maka $x_1 = 45$
- karena $x_1 + x_2 = 40$ dan $x_1 = 45$, maka $x_2 = -5$

Laju aliran $x_1 = 45$, $x_2 = -5$, dan $x_3 = 35$. Laju aliran x_2 bernilai negatif berarti arah gambar pada soal tidak benar. Seharusnya arah aliran x_2 ke simpul menuju *node A*.

3. Latihan C Penjumlahan dan Pengurangan Antarmatriks

Alternatif Penyelesaian

1. Salah. Operasi penjumlahan matriks dilakukan dengan cara menjumlahkan elemen-elemen matriks A dan elemen-elemen matriks B yang seletak.
2. Benar.
3. Salah. Dua buah matriks dapat dijumlahkan apabila matriks tersebut memiliki ordo yang sama.

$$4. \begin{bmatrix} 2x & y \\ 3z & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -x \\ 2y & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = O$$

$$\begin{bmatrix} 2x & y \\ 3z & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -x \\ 2y & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x - 4 & y + x + 1 \\ 3z - 2y - 9 & z - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh persamaan berikut.

$$2x - 4 = 0$$

persamaan 1

$$y + x + 1 = 0$$

persamaan 2

$$3z - 2y - 9 = 0 \quad \text{persamaan 3}$$

$$z - 1 = 0 \quad \text{persamaan 4}$$

- Persamaan pertama: $2x - 4 = 0$ maka $x = 2$.
- Substitusikan nilai x ke persamaan kedua sehingga diperoleh $y = -3$.
- Persamaan keempat: $z - 1 = 0$ maka $z = 1$.
- Jadi, nilai $x = 2$, $y = -3$, dan $z = 1$.

$$5. \begin{bmatrix} 3a \\ 3b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4b \\ 4a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a + 4b \\ 3b + 4a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Diperoleh persamaan berikut.

$$3a + 4b = 1 \quad \text{persamaan 1}$$

$$3b + 4a = -1 \quad \text{persamaan 2}$$

Untuk memperoleh nilai a dan b , kita dapat menggunakan metode eliminasi dan substitusi pada persamaan 1 dan 2. Untuk mengeliminasi variabel a , kalikan persamaan 1 dengan 4 dan kalikan persamaan 2 dengan 3, kemudian kurangkan kedua persamaan tersebut.

$$\begin{array}{rcl} 3a + 4b = 1 & \times 4 & 12a + 16b = 4 \\ 4a + 3b = -1 & \times 3 & 12a + 9b = -3 \\ \hline & & 7b = 7 \\ & & b = 1 \end{array}$$

Substitusikan nilai b ke persamaan 1 sehingga diperoleh $a = -1$. Jadi, nilai $a = -1$ dan $b = 1$.

6. Matriks banyak buah yang masih segar dapat diperoleh dari hasil pengurangan matriks banyak buah yang dikirim oleh penyuplai dengan banyak buah yang busuk.

$$\begin{bmatrix} 50 & 62 \\ 70 & 66 \\ 45 & 58 \\ 40 & 47 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50-6 & 62-4 \\ 70-2 & 66-0 \\ 45-0 & 58-1 \\ 40-1 & 47-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 58 \\ 68 & 66 \\ 45 & 57 \\ 39 & 46 \end{bmatrix}$$

Jadi, matriks banyak buah untuk dijual adalah

$$\begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \\ \begin{bmatrix} 44 & 58 \\ 68 & 66 \\ 45 & 57 \\ 39 & 46 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{jeruk} \\ \text{apel} \\ \text{pir} \\ \text{lemon} \end{array} \end{array}$$

4. Latihan D Perkalian Matriks

Alternatif Penyelesaian

1. Benar.
2. Benar.
3. Salah. Ada jika A adalah matriks identitas.
4. Karena $P - 2X = 3Q$, maka $X = -\frac{3}{2}Q + \frac{1}{2}P$.

$$X = -\frac{3}{2} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$5. \begin{bmatrix} x-2 & 9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -4x+17 & 9y+9 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena $-4x + 17 = -3$, maka $x = 5$

Karena $9y + 9 = -9$, maka $y = -2$

Jadi, nilai $x + y = 5 + (-2) = 3$.

6. Diketahui suku bunga tunggal 6% per tahun, maka

$$\begin{aligned} \text{Matriks besar bunga} &= 6\% \times \begin{bmatrix} 2.000.000 \\ 3.500.000 \\ 4.000.000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6\% \times 2.000.000 \\ 6\% \times 3.500.000 \\ 6\% \times 4.000.000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 120.000 \\ 210.000 \\ 240.000 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, matriks besarnya bunga tabungan mereka (dalam rupiah)

$$\text{adalah } \begin{bmatrix} 120.000 \\ 210.000 \\ 240.000 \end{bmatrix}.$$

7. Diketahui:

$$\text{Matriks banyaknya kue adalah } \begin{bmatrix} 23 & 22 & 17 \\ 27 & 20 & 16 \end{bmatrix}.$$

Matriks harga kue adalah $\begin{bmatrix} 40.000 \\ 30.000 \\ 27.000 \end{bmatrix}$.

Matriks pendapatan merupakan perkalian dari matriks banyak kue dan matriks harga kue.

$$\begin{bmatrix} 23 & 22 & 17 \\ 27 & 20 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40.000 \\ 30.000 \\ 27.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \times 40.000 + 22 \times 30.000 + 17 \times 27.000 \\ 27 \times 40.000 + 20 \times 30.000 + 16 \times 27.000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.039.000 \\ 2.112.000 \end{bmatrix}$$

Jadi, pendapatan toko di cabang Yogyakarta sebesar Rp2.039.000,00 dan pendapatan toko di cabang Jakarta sebesar Rp2.112.000,00.

5. Latihan E Determinan Matriks dan Invers Matriks

Alternatif Penyelesaian

1. Salah. Cobalah buktikan menggunakan sembarang matriks.
2. Benar.
3. Benar.
4. Karena $AC = B$, maka $C = A^{-1}B$.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} -19 & 1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = (-19)(0) - (8)(1) = -8$$

Jadi, nilai determinan C adalah -8 .

5. $(AB^{-1})^{-1} = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 23 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}$
6. Misalkan:

- Banyak bakteri dari Strain I $= x$
- Banyak bakteri dari Strain II $= y$
- Banyak bakteri dari Strain III $= z$

Diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 980 \\ 740 \\ 680 \end{bmatrix}$$

- a. Penentuan banyak bakteri dari Strain I, Strain II, dan Strain III dengan cara determinan matriks adalah sebagai berikut.

Perhitungan nilai x , y , dan z :

$$D_x = \begin{vmatrix} 980 & 4 & 3 \\ 740 & 2 & 1 \\ 680 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3.600, D_y = \begin{vmatrix} 1 & 980 & 3 \\ 2 & 740 & 1 \\ 1 & 680 & 0 \end{vmatrix} = 2.160,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 980 \\ 2 & 2 & 740 \\ 1 & 4 & 680 \end{vmatrix} = 1.800 \text{ dan } D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 18$$

Maka

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{3.600}{18} = 200$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2.160}{18} = 120$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{1.800}{18} = 100$$

Banyak bakteri dari Strain I = 200

Banyak bakteri dari Strain II = 120

Banyak bakteri dari Strain III = 100

- b. Penentuan banyak bakteri dari Strain I, Strain II, dan Strain III dengan cara invers matriks adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 980 \\ 740 \\ 680 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 980 \\ 740 \\ 680 \end{bmatrix}$$

Gunakan rumus invers matriks ordo 3×3 .

$$\text{Misalkan } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$|A| = 18$$

$$K(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 12 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adjoin}(A) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 12 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -4 & 12 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -4 & 12 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Nilai x , y , dan z dapat ditentukan

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 980 \\ 740 \\ 680 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 980 \\ 740 \\ 680 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 120 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Banyak bakteri dari Strain I = 200

Banyak bakteri dari Strain II = 120

Banyak bakteri dari Strain III = 100

6. Uji Kompetensi

Alternatif Penyelesaian

1. Salah. Karena matriks B tidak harus memiliki 3 baris. Banyak baris matriks B sama dengan banyak kolom matriks A .
2. Salah. Karena $I^2A = IA = A$.
3. Salah. Karena perkalian matriks tidak bersifat komutatif.
4. Benar.
5. Nilai $x = 2$, $y = 4$, dan $z = 6$.
6. Nilai $a = 8$, $b = 1$, dan $c = 6$ sehingga $c\sqrt{b+a} = 6\sqrt{1+8} = 18$.

7. Karena prinsip yang digunakan ialah banyak kendaraan yang masuk menuju titik persimpangan A, B, C, dan D harus sama dengan jumlah kendaraan yang keluar, maka

$$\begin{bmatrix} 310 + 250 \\ x_1 + 260 \\ x_2 + 400 \\ x_3 + 360 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 + x_1 \\ x_2 + 190 \\ x_3 + 290 \\ 520 + 250 \end{bmatrix}$$

Dengan konsep kesamaan dua matriks diperoleh nilai $x_1 = 230$, $x_2 = 300$, dan $x_3 = 410$. Jadi, banyak kendaraan pada x_1 , x_2 , dan x_3 berturut-turut adalah 230, 300, dan 410.

8. Jumlah tawaran dapat diperoleh dengan menjumlahkan ketiga matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} 16 \\ 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \\ 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 19 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 + 15 + 19 \\ 14 + 13 + 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 51 \end{bmatrix}$$

Jadi, kontraktor yang akan dipilih untuk pemasangan baja ringan agar pengeluaran minimum adalah kontraktor A dengan total biaya Rp50.000.000,00.

9. Nilai x_1 , x_2 , dan x_3 yang tepat agar persamaan kimia setimbang dapat ditentukan dengan cara berikut.

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_3 \\ 12x_3 \\ 6x_3 + 12 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas, diperoleh nilai $x_1 = 6$, $x_2 = 6$, dan $x_3 = 1$. Jadi, persamaan reaksi kesetimbangannya adalah $6\text{CO}_2 + 6\text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 + 6\text{O}_2$.

$$10. PQ = \begin{bmatrix} 20 & 19 \\ 8 & 12 \\ 15 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 29 \\ 16 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 904 & 979 \\ 432 & 484 \\ 722 & 792 \end{bmatrix}$$

Interpretasi setiap elemen matriks PQ adalah sebagai berikut:

- jenis *free standing furniture* membutuhkan 904 m² material MDF;
- jenis *built in furniture* membutuhkan 432 m² material MDF;
- jenis *knockdown furniture* membutuhkan 722 m² material MDF;

- jenis *free standing furniture* membutuhkan 979 m² material *plywood*;
 - jenis *built in furniture* membutuhkan 484 m² material *plywood*; dan
 - jenis *knockdown furniture* membutuhkan 792 m² material *plywood*.
11. Total keluaran sektor P adalah 284 dan sektor Q adalah 381.
 12. Dengan menggunakan konsep determinan matriks atau invers matriks, maka diperoleh $I_1 = \frac{1}{2}$ ampere, $I_2 = 2$ ampere, dan $I_3 = \frac{5}{2}$ ampere.
 13. Matriks $A^{2.017} + A^{2.020} + A^{2.023} = I$, dengan I adalah matriks identitas berordo 2×2 .
 14. $D = D_x = D_y = 0$
 15. Dengan konsep barisan aritmetika dan geometri, diperoleh nilai $a = 4$, $b = 5$, dan $c = 2$. Karena $\det (((P^t)^{-1})^t)^{-1} = \det P^t$ dan $\det P^t = -4$, $\det (((P^t)^{-1})^t)^{-1} = -4$.

7. Proyek

Pesan Rahasia

Penyelesaian dari proyek ini akan berbeda-beda, bergantung pada pesan yang dikirim. Berikut ini salah satu contoh jawaban dari peserta didik.

Membuat pesan rahasia

1. Misalkan sebuah pesan yang akan dikirim untuk kelompok lain adalah “MATEMATIKA MENYENANGKAN”.
2. Buatlah aturan pengubahan huruf menjadi kode angka sesuai dengan urutan alfabet.

Spasi	A	B	C	D	...	Z
0	1	2	3	4	...	26

3. Mengubah pesan menjadi kode angka.

Huruf	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	spasi	
Angka	13	1	20	5	13	1	20	9	11	1	0	
Huruf	M	E	N	Y	E	N	A	N	G	K	A	N
Angka	13	5	14	25	5	14	1	14	7	11	1	14

$$4. A = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 20 & 1 & 5 & 5 & 14 & 1 \\ 1 & 13 & 9 & 0 & 14 & 14 & 7 & 14 \\ 20 & 1 & 11 & 13 & 25 & 1 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$5. K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$6. KA = \begin{bmatrix} 67 & 25 & 71 & 28 & 74 & 26 & 57 & 16 \\ 80 & 30 & 91 & 29 & 79 & 31 & 71 & 17 \\ 62 & 29 & 51 & 39 & 103 & 31 & 47 & 28 \end{bmatrix}$$

7. Setelah melakukan operasi mod 27 untuk setiap elemen matriks

$$KA, \text{ diperoleh matriks } \begin{bmatrix} 13 & 25 & 17 & 1 & 20 & 26 & 3 & 16 \\ 26 & 3 & 10 & 2 & 25 & 4 & 17 & 17 \\ 8 & 2 & 24 & 12 & 22 & 4 & 20 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Mengubah kembali setiap elemen hasil mod 27 yang diperoleh dari langkah 7 menjadi huruf sesuai dengan aturan kode pada langkah 3.

Angka	13	26	8	25	3	2	17	10	24	1	2	12
Huruf	M	Z	H	Y	C	B	Q	J	X	A	B	L
Angka	20	25	22	26	4	4	3	17	20	16	17	1
Huruf	T	Y	V	Z	D	D	C	Q	T	P	Q	A

9. Pesan rahasia yang dikirim ke kelompok lain adalah “MZHYCBQJXABLTYVZDDCQTPQA”.

Membaca pesan rahasia

1. Gunakan aturan pengubahan huruf menjadi kode angka sesuai dengan urutan alfabet.

Spasi	A	B	C	D	...	Z
0	1	2	3	4	...	26

2. Mengubah pesan yang telah diterima menjadi kode angka.

Huruf	M	Z	H	Y	C	B	Q	J	X	A	B	L
Angka	13	26	8	25	3	2	17	10	24	1	2	12
Huruf	T	Y	V	Z	D	D	C	Q	T	P	Q	A
Angka	20	25	22	26	4	4	3	17	20	16	17	1

$$3. B = \begin{bmatrix} 13 & 25 & 17 & 1 & 20 & 26 & 3 & 16 \\ 26 & 3 & 10 & 2 & 25 & 4 & 17 & 17 \\ 8 & 2 & 24 & 12 & 22 & 4 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4. A = K^{-1}B$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 13 & 25 & 17 & 1 & 20 & 26 & 3 & 16 \\ 26 & 3 & 10 & 2 & 25 & 4 & 17 & 17 \\ 8 & 2 & 24 & 12 & 22 & 4 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & -22 & -7 & 1 & 5 & -22 & 14 & 1 \\ 55 & -203 & -45 & 27 & 14 & -202 & 115 & -40 \\ -34 & 136 & 38 & -14 & -2 & 136 & -70 & 27 \end{bmatrix}$$

5. Hasil operasi mod 27 untuk setiap elemen matriks A adalah

$$\begin{bmatrix} 13 & 5 & 20 & 1 & 5 & 5 & 14 & 1 \\ 1 & 13 & 9 & 0 & 14 & 14 & 7 & 14 \\ 20 & 1 & 11 & 13 & 25 & 1 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Mengubah kembali elemen hasil mod 27 yang kalian peroleh dari langkah 5 menjadi huruf sesuai dengan aturan kode pada langkah 1.

Angka	13	1	20	5	13	1	20	9	11	1	0		
Huruf	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	spasi		
Angka	13	5	14	25	5	14	1	14	7	11	1	14	0
Huruf	M	E	N	Y	E	N	A	N	G	K	A	N	spasi

7. Isi dari pesan rahasia adalah “MATEMATIKA MENYENANGKAN”.

Pemecahan pesan rahasia dapat menggunakan Sifat 1.5.

I. Refleksi

Bapak/Ibu Guru dapat melakukan refleksi pembelajaran setiap peserta didik pada setiap akhir bab menggunakan fitur Refleksi pada Buku Siswa.

Bapak/Ibu Guru juga perlu melakukan refleksi terhadap pembelajaran yang telah dilakukan. Terdapat banyak cara melakukannya. Salah satunya ialah dengan mengikuti panduan refleksi berikut.

Tabel 1.1 Panduan Refleksi Pembelajaran Matriks

No.	Panduan Refleksi
1.	Deskripsikan pengalaman Bapak/Ibu Guru dalam mengajarkan Matriks.
2.	Deskripsikan perasaan dominan Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Matriks.
3.	Evaluasilah pengalaman Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Matriks.
4.	Apa saja pelajaran berharga yang telah dipetik Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Matriks?
5.	Bagaimana rencana Bapak/Ibu Guru untuk menindaklanjuti pelajaran-pelajaran berharga tersebut?

J. Sumber Belajar

Berikut beberapa sumber belajar untuk mempelajari matriks.

- Buku Siswa
- Buku Pembelajaran SMA Matematika Kelas XI KD 3.3, 3.4, 4.3, dan 4.4 dari Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. Buku ini berisikan materi serupa.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2024

Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut (Edisi Revisi)
untuk SMA Kelas XI

Penulis: Yosep Dwi Kristanto, Muhammad Taqiyuddin, Al Azhary Masta, Elyda Yulfiana
ISBN: 978-623-388-339-9

Panduan Khusus

Bab 2 POLINOMIAL

Sumber: donoem (2013)



A. Pendahuluan

1. Tujuan Pembelajaran

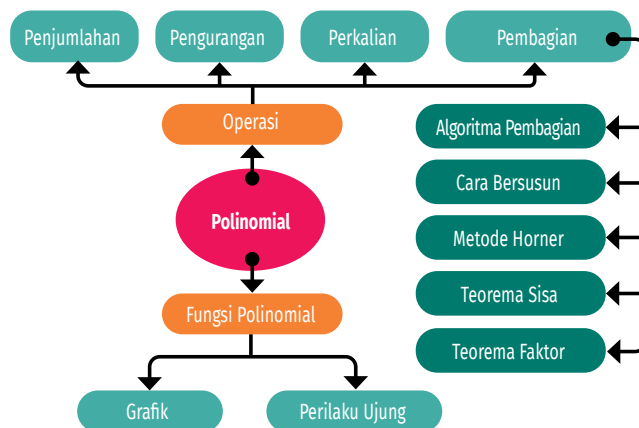
Setelah mempelajari bab “Polinomial”, peserta didik diharapkan mampu:

- menjelaskan definisi polinomial dan fungsi polinomial;
- mengidentifikasi karakteristik polinomial;
- melakukan penjumlahan, pengurangan, dan perkalian polinomial;
- melakukan pembagian polinomial;
- menggunakan Teorema Sisa;
- melakukan pefaktoran polinomial;
- menentukan pembuat nol polinomial;
- membuktikan identitas polinomial; dan
- melakukan pefaktoran polinomial menggunakan identitas polinomial.

Tujuan-tujuan pembelajaran tersebut merupakan tujuan umum setiap subbabnya. Tujuan pembelajaran yang lebih detail dapat ditemukan pada setiap aktivitas dalam setiap subbab.

Bapak/Ibu Guru dapat menentukan kriteria ketercapaian tujuan pembelajaran (KKTP) Bab 2 dengan mengacu pada kolom Tujuan Pembelajaran dalam **Tabel 3** Pemetaan Capaian Pembelajaran dan Tujuan Pembelajaran pada bagian “Panduan Umum”.

2. Peta Materi



Gambar 2.1 Peta Materi Bab 2 Buku Siswa

3. Saran Durasi Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran bab “Polinomial” ini dapat dilakukan dalam 25 jam pelajaran (JP) dengan 1 JP = 45 menit. Meskipun demikian, durasi pembelajaran ini dapat disesuaikan dengan kebutuhan setiap sekolah.

B. Materi Prasyarat

Pembelajaran dalam bab “Polinomial” terhubung dengan pembelajaran-pembelajaran sebelumnya. Topik polinomial dan fungsi polinomial dalam Subbab A terkait langsung dengan materi bentuk aljabar dan operasi-operasinya, serta grafik sebuah fungsi. Topik penjumlahan, pengurangan, dan perkalian polinomial dalam Subbab B terkait dengan materi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian pada bilangan real. Selain itu, topik tersebut juga menggunakan pengetahuan awal peserta didik tentang luas daerah sebagai model untuk melakukan perkalian polinomial.

Topik pembagian polinomial dalam Subbab C dipersyaratkan oleh materi pembagian bilangan dan pecahan campuran. Topik faktor dan pembuat nol polinomial dalam Subbab D terkait dengan materi fungsi, serta persamaan linear dan nonlinear. Terakhir, topik identitas polinomial dalam Subbab D dipersyaratkan oleh materi operasi-operasi aljabar.

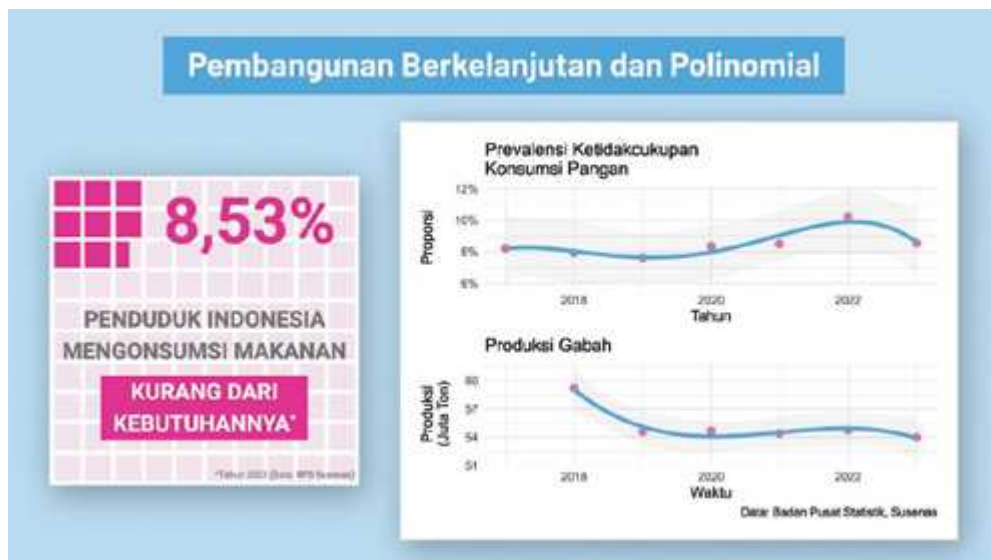
C. Apersepsi

Pada awal pembelajaran Polinomial, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan pertanyaan pemantik dari Buku Siswa sebagai berikut.

Salah satu kunci penting pembangunan berkelanjutan adalah ketahanan pangan. Bagaimana fungsi polinomial dapat digunakan untuk memodelkan masalah ketahanan pangan?

Hubungkan pertanyaan tersebut dengan dua konsep dalam ketahanan pangan, yaitu prevalensi ketidakcukupan konsumsi pangan dan produktivitas gabah di Indonesia. Setelah itu, Bapak/Ibu dapat menunjukkan fakta tentang kedua hal tersebut dengan menggunakan diagram-diagram dalam bagian pengantar bab (yaitu bagian yang

berjudul Pembangunan Berkelanjutan dan Polinomial). Diagram-diagram tersebut ditunjukkan pada Gambar 2.2 berikut.



Gambar 2.2 Diagram tentang Prevalensi Ketidacukupan Konsumsi Pangan dan Produktivitas Gabah di Indonesia

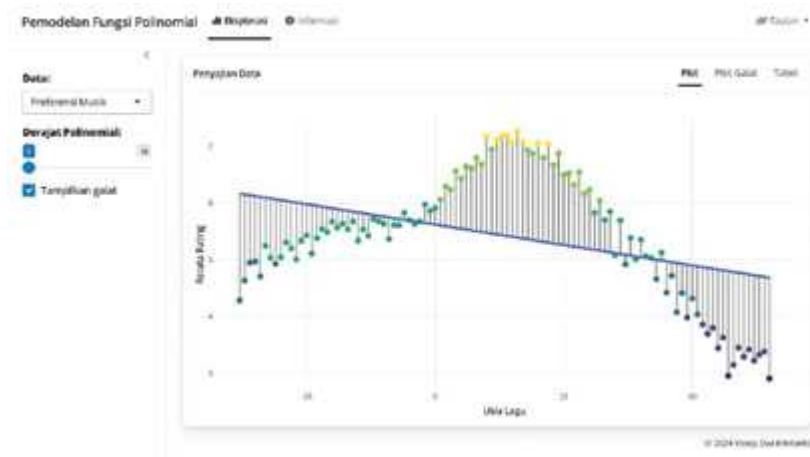
Bapak/Ibu Guru kemudian dapat menunjukkan bagaimana fungsi polinomial dapat digunakan untuk memodelkan prevalensi ketidacukupan konsumsi pangan dan produktivitas gabah di Indonesia. Dengan kegiatan apersepsi seperti ini, peserta didik diharapkan dapat:

- mengetahui bagaimana polinomial dapat digunakan untuk memahami permasalahan sehari-hari sehingga mendorong mereka untuk mempelajarinya secara lebih mendalam; dan
- membangun kesadaran terhadap salah satu tema dalam tujuan pembangunan berkelanjutan, yaitu ketahanan pangan.

Sebagai alternatif, Bapak/Ibu Guru juga dapat menggunakan media pembelajaran digital pada tautan <https://s.id/model-polinom> atau dengan memindai kode respons cepat di samping. Melalui media pembelajaran tersebut, Bapak/Ibu tidak hanya dapat memodelkan prevalensi ketidacukupan konsumsi pangan dan produktivitas gabah di Indonesia, tetapi juga banyak pengunjung objek wisata Candi Borobudur, rerata



harga per unit pembangunan rumah oleh Perum Perumnas, dan preferensi musik berdasarkan usia penikmat musik. Tampilan media pembelajaran tersebut ditunjukkan pada Gambar 2.3 berikut.



Gambar 2.3 Tampilan Media Pembelajaran Pemodelan dengan Fungsi Polinomial

D. Penilaian sebelum Pembelajaran

Bapak/Ibu Guru dapat melakukan penilaian sebelum pembelajaran Polinomial. Untuk mengetahui sejauh mana peserta didik memiliki kemampuan prasyarat, Bapak/Ibu dapat membuat soal berdasarkan materi-materi prasyarat yang diidentifikasi pada bagian Materi Prasyarat. Selain itu, Bapak/Ibu juga dapat mendesain soal berdasarkan tujuan pembelajaran pada bagian Pendahuluan untuk mengetahui pengetahuan awal peserta didik terhadap materi Polinomial.

E. Panduan Pembelajaran Buku Siswa

Subbab A: Polinomial dan Fungsi Polinomial

Aktivitas 1

Membangun Konsep Polinomial

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menyebutkan pengertian monomial menggunakan bahasanya sendiri dan menggunakannya untuk mendeskripsikan pengertian polinomial.

Bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok dan mintalah mereka untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Mengenal Monomial. Alternatif penyelesaian kegiatan eksplorasi tersebut adalah sebagai berikut.



Eksplorasi

Mengenal Monomial

1. Jawaban bervariasi.
2. Pengelompokannya didasarkan pada eksponen variabel-variabelnya. Semua eksponen variabel pada kelompok 1 merupakan bilangan cacah (bilangan bulat tak negatif), sedangkan pada kelompok 2 bukan bilangan cacah.
3. Monomial merupakan suatu bilangan, suatu variabel berpangkat bilangan cacah, atau perkalian antara bilangan dan satu atau lebih variabel berpangkat bilangan cacah.

Mintalah beberapa kelompok untuk mengomunikasikan jawaban kegiatan eksplorasi tersebut. Setelah itu, tegaskan konsep-konsep pentingnya, yaitu monomial, konstanta, dan koefisien. Gunakan konsep monomial itu untuk secara bersama-sama membangun konsep polinomial sebagai bentuk aljabar yang berupa monomial atau penjumlahan dari dua atau lebih monomial. Mintalah peserta didik untuk mencermati Definisi 2.1 pada Buku Siswa.

Setelah peserta didik memahami pengertian polinomial, ajaklah mereka untuk mencermati Contoh 2.1. Pada contoh tersebut, mereka berlatih untuk mengidentifikasi bentuk aljabar yang merupakan polinomial dan yang bukan. Setelah itu, mintalah mereka untuk mengerjakan Mari Mencoba 2.1. Berikut ini alternatif penyelesaiannya.



Mari Mencoba 2.1

Bentuk aljabar $4 - x - 2x^4$ dan $3xy^4 + 5x^3y^2 - 7x$ merupakan polinomial karena semua sukunya merupakan monomial. Bentuk aljabar $\frac{2x^2}{y} + xy^2$ bukan merupakan polinomial karena salah satu sukunya, yaitu $\frac{2x^2}{y}$, bukan merupakan monomial.

Mintalah beberapa kelompok untuk menyampaikan jawaban dan penalarannya. Bapak/Ibu Guru perlu memberikan penegasan terhadap jawaban peserta didik tersebut.

Aktivitas 2

Membangun Konsep Derajat Polinomial

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menemukan strategi bagaimana menentukan derajat suatu monomial dan menggunakannya untuk mengidentifikasi derajat sebuah polinomial.

Bapak/Ibu Guru, mintalah peserta didik untuk mengerjakan Eksplorasi: Mengetahui Derajat Suatu Polinomial. Aktivitas eksplorasi tersebut memandu mereka untuk menemukan sendiri bagaimana menentukan derajat suatu polinomial. Alternatif penyelesaian kegiatan eksplorasi tersebut adalah sebagai berikut.



Eksplorasi

Mengetahui Derajat Suatu Polinomial

1. Derajat suatu monomial merupakan penjumlahan eksponen variabel-variabelnya.
2. Derajat suatu polinomial merupakan derajat tertinggi monomial-monomial penyusunnya.

Setelah peserta didik menyelesaikan eksplorasi tersebut, tegaskan strategi menentukan derajat monomial dan polinomial. Selama penegasan tersebut, ajaklah peserta didik untuk mencermati Definisi 2.2 dan 2.3. Agar peserta didik semakin memahami derajat monomial dan polinomial, mintalah mereka untuk mencermati Contoh 2.2 dan mengerjakan Mari Mencobanya.

Berikut adalah penyelesaian Mari Mencoba untuk Contoh 2.2.



Mari Mencoba 2.2

Derajat dari suku-suku polinomial $13,13x^2y^3z^4 - 8,98xy^4z^5 + 10,18$ secara berturut-turut adalah 9, 10, dan 0 sehingga derajat tertinggi suku-suku tersebut adalah 10. Walhasil, derajat polinomial tersebut adalah 10.

Penting juga bagi Bapak/Ibu Guru untuk mengajak peserta didik mendiskusikan kolom Mari Mengomunikasikan. Kolom ini bertujuan mengantisipasi miskonsepsi yang umum terjadi tentang derajat polinomial. Berikut alternatif pembahasan kolom tersebut.



Mari Mengomunikasikan

Pemikiran Rahma keliru. Bilangan 0 juga dapat dinyatakan sebagai $0x^0$, $0x^1$, $0x^2$, dan seterusnya. Dengan demikian, derajat 0 tidak terdefinisi.

Pada akhir aktivitas pembelajaran ini, ajaklah peserta didik untuk mengerjakan kolom Mari Berpikir Kreatif secara berkelompok. Kolom ini melatih mereka untuk menyelesaikan masalah tentang derajat polinomial. Berikut alternatif penyelesaiannya.



Mari Berpikir Kreatif

Strateginya adalah dengan hanya memperhatikan operasi pada suku berderajat tertinggi, khususnya pada variabel-variabelnya. Pada bentuk $(6x^5 - 5)^2(2x^2 + 7)^3$, kita hanya perlu memperhatikan $6x^5$ dan $2x^2$. Suku $6x^5$ dipangkatkan 2 dan kemudian dikalikan dengan $2x^2$ yang dipangkatkan 3, sehingga menghasilkan suku berderajat $2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 16$. Dengan demikian, derajat polinomial yang dihasilkan adalah 16.

1. Derajatnya $15 \cdot 2 + 10 \cdot 5 = 80$.
2. Derajatnya $2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 18$.

Aktivitas 3

Menganalisis Grafik Fungsi Polinomial

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat membangun pemahaman tentang fungsi polinomial dan menganalisis karakteristik fungsi tersebut melalui grafiknya.

Bapak/Ibu Guru, mintalah peserta didik untuk berdiskusi dan mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Pertandingan dalam Liga. Melalui eksplorasi tersebut, mereka dipandu untuk membangun sebuah fungsi polinomial. Berikut adalah alternatif penyelesaian eksplorasi tersebut.



Eksplorasi

Pertandingan dalam Liga

1. Total banyaknya pertandingan sebuah liga yang memuat 4, 5, 10, dan 20 tim secara berturut-turut adalah $4 \cdot (4 - 1) = 12$, $5 \cdot (5 - 1) = 20$, $10 \cdot (10 - 1) = 90$, dan $20 \cdot (20 - 1) = 380$.

2. Total banyaknya pertandingan dalam sebuah liga yang terdiri atas x tim adalah

$$f(x) = x(x - 1)$$

3. Persamaan fungsi pada nomor 2 dapat dijabarkan menjadi $f(x) = x^2 - x$. Dengan demikian, $a = 1$, $b = -1$, dan $c = 0$.
4. Jawaban bervariasi. Misalnya, fungsi polinomial merupakan sebuah fungsi yang persamaannya berbentuk polinomial.

Mintalah beberapa kelompok untuk menyampaikan hasil pekerjaannya. Setelah itu, Bapak/Ibu Guru perlu memberikan penegasan mengenai fungsi polinomial dengan mengacu pada Definisi 2.4.

Selanjutnya, ajaklah peserta didik untuk mempelajari Contoh 2.3. Contoh tersebut mendemonstrasikan cara menggambar grafik fungsi polinomial dengan melakukan plot titik. Setelah itu, mintalah mereka untuk mengerjakan Mari Mencoba 2.3 dan mempresentasikan hasil pekerjaannya.

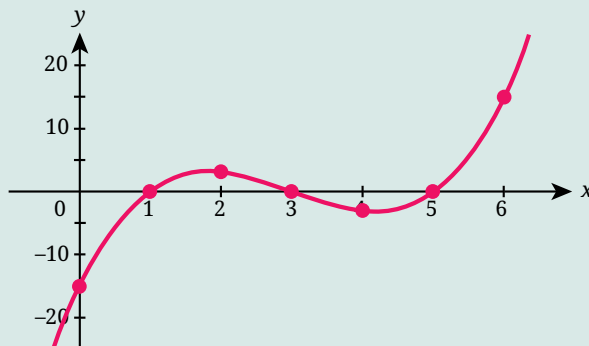


Mari Mencoba 2.3

Nilai fungsi $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ untuk beberapa nilai x disajikan pada tabel berikut.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-15	0	3	0	-3	0	15

Dengan demikian, grafik f ditunjukkan pada Gambar 2.4 berikut.



Gambar 2.4 Grafik Fungsi $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$

Sebagai catatan, Bapak/Ibu Guru dapat mengonfirmasi jawaban peserta didik menggunakan kalkulator grafik (misalnya Desmos atau GeoGebra).

Berikutnya, mintalah peserta didik untuk mencermati beberapa contoh grafik fungsi polinomial (Buku Siswa, Gambar 2.4). Dari grafik tersebut, diskusikan beberapa karakteristiknya, misalnya tentang perpotongannya dengan sumbu- x dan sumbu- y serta perilaku ujungnya. Jelaskan bahwa perilaku ujung sebuah grafik adalah perilaku grafik tersebut ketika x mendekati tak hingga atau negatif tak hingga.

Setelah peserta didik mengenal konsep perilaku ujung, mintalah mereka untuk mencermati Contoh 2.4 dan mengerjakan Mari Mencobanya. Berikut ini alternatif penyelesaian Mari Mencoba tersebut.



Mari Mencoba 2.4

Fungsi $f(x) = -2x^7 - 3x^3 + 1$ merupakan fungsi polinomial dengan $a_n < 0$ dan n ganjil. Dengan demikian, grafiknya mengarah ke kiri atas dan kanan bawah ($\nearrow$, $\searrow$).

Jika memungkinkan, ajaklah peserta didik untuk mengerjakan Aktivitas Interaktif di alamat <https://s.id/ujung-polinom> atau dengan memindai kode respons cepat pada Buku Siswa. Aktivitas Interaktif tersebut mengajak peserta didik untuk menyelidiki perilaku ujung grafik fungsi polinomial.

Bagian akhir aktivitas pembelajaran ini adalah Matematika dan Sains: Memahami Isu Ketahanan Pangan di Indonesia. Mintalah peserta didik untuk membacanya agar mereka menyadari isu ketahanan pangan di Indonesia sekaligus memberikan contoh bagaimana fungsi polinomial sangat bermanfaat untuk memodelkan isu-isu penting di Indonesia.

Subbab B: Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Polinomial

Aktivitas 4

Menemukan Hubungan antara Polinomial dan Bilangan

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat mengoneksikan pengetahuan awal mereka tentang bilangan dengan polinomial.

Bapak/Ibu Guru, mintalah peserta didik untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Membandingkan Polinomial dengan Bilangan. Melalui kegiatan ini, peserta didik diharapkan mengingat kembali operasi pada bilangan dan mengoneksikannya dengan polinomial. Koneksi ini penting sebagai landasan mereka untuk mempelajari pembahasan berikutnya, yaitu penjumlahan, pengurangan, dan perkalian polinomial.



Membandingkan Polinomial dengan Bilangan

Berikut adalah tabel yang lengkap.

53	$50 + 3$	$5x + 3$
375	$300 + 70 + 5$	$3x^2 + 7x + 5$
2.298	$2.000 + 200 + 90 + 8$	$2x^3 + 2x^2 + 9x + 8$
6.311	$6.000 + 300 + 10 + 1$	$6x^3 + 3x^2 + x + 1$
17.742	$10.000 + 7.000 + 700 + 40 + 2$	$x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 4x + 2$

Untuk mengidentifikasi kesamaan dan perbedaannya, jawaban peserta didik dapat bervariasi. Berikut ini salah satu contoh jawabannya.

Kesamaan: Bilangan dan polinomial dapat dipandang sebagai penjumlahan dari bentuk-bentuk yang lebih sederhana.

Perbedaan: Bentuk-bentuk sederhana tersebut merupakan bilangan kelipatan 10^n untuk bilangan, sedangkan untuk polinomial adalah x^n dengan x sembarang bilangan real (tidak harus 10).

Mintalah beberapa peserta didik untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Setelah itu, Bapak/Ibu perlu menegaskan bagaimana bilangan dan polinomial berhubungan.

Aktivitas 5

Menjumlahkan dan Mengurangkan Polinomial

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menemukan strategi untuk melakukan penjumlahan dan pengurangan polinomial menggunakan strategi penjumlahan dan pengurangan bilangan.

Bapak/Ibu Guru, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok dan mintalah mereka untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Melakukan Penjumlahan dan Pengurangan Polinomial. Berikut adalah alternatif penyelesaiannya.



Eksplorasi

Melakukan Penjumlahan dan Pengurangan Polinomial

1. Jawaban bervariasi. Peserta didik diharapkan dapat menjelaskan secara akurat bagaimana menjumlahkan dan mengurangi bilangan dengan cara bersusun.
2. Berikut adalah hasil penjumlahan dan pengurangan polinomial dengan cara bersusun. Cara tersebut merupakan generalisasi terhadap strategi pada nomor 1.

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 7x^2 + 3x + 5 \\ 6x^3 + 2x^2 + 4x + 1 \\ \hline 8x^3 + 9x^2 + 7x + 6 \end{array} + \begin{array}{r} 9x^3 + 4x^2 + 6x + 5 \\ 2x^3 + 3x^2 + 3x + 4 \\ \hline 7x^3 + x^2 + 3x + 1 \end{array} -$$

3. Jawaban bervariasi. Misalnya, aku setuju dengan pekerjaan temanku tersebut. Dia menjumlahkan dan mengurangi suku-suku yang variabelnya memiliki eksponen sama. Hal ini menggunakan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan dan pengurangan. Sebagai contoh, $2x^3 + 6x^3 = (2 + 6)x^3 = 8x^3$.

Mintalah beberapa kelompok untuk membagikan hasil pekerjaannya dan bahaslah secara klasikal pekerjaan tersebut. Setelah itu, hubungkan kegiatan eksplorasi tersebut dengan konsep suku-suku sejenis. Setelah itu, ajaklah peserta didik untuk mencermati Contoh 2.5 dan mengerjakan Mari Mencoba. Berikut adalah alternatif penyelesaian Mari Mencoba tersebut.



Mari Mencoba 2.5

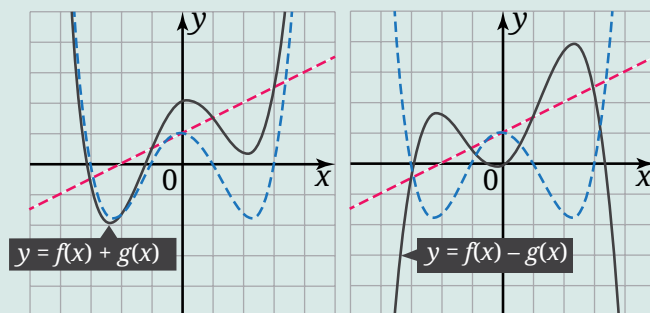
$$\begin{aligned}(2a^2b - 3ab^2 + 5) + (3a^2b + ab^2) \\&= 2a^2b - 3ab^2 + 5 + 3a^2b + ab^2 \\&= 2a^2b + 3a^2b - 3ab^2 + ab^2 + 5 \\&= 5a^2b - 2ab^2 + 5\end{aligned}$$

Jika memungkinkan, Bapak/Ibu dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan kolom Mari Berpikir Kreatif secara berkelompok. Alternatif penyelesaiannya adalah sebagai berikut.



Mari Berpikir Kreatif

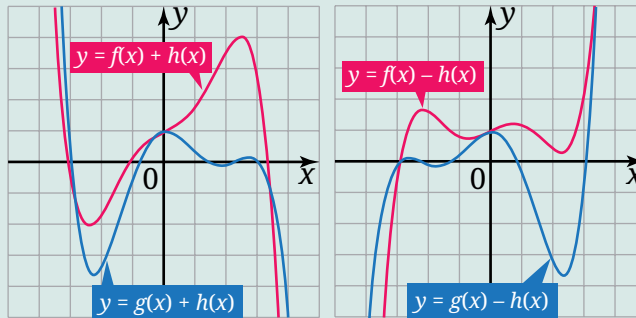
1. Grafik $f(x) + g(x)$ dan $f(x) - g(x)$ ditunjukkan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Grafik $f(x) + g(x)$ dan $f(x) - g(x)$

Cara mendapatkan grafik tersebut adalah dengan menentukan nilai fungsinya. Misalkan untuk $x = 0$, nilai fungsi f dan g adalah 1. Dengan demikian, $f(0) + g(0) = 1 + 1 = 2$.

2. Dengan cara yang serupa, grafik $f(x) + h(x)$ dan $g(x) + h(x)$, $f(x) - h(x)$, dan $g(x) - h(x)$ ditunjukkan pada Gambar 2.6 berikut.



Gambar 2.6 Grafik $f(x) + h(x)$, $g(x) + h(x)$, $f(x) - h(x)$, dan $g(x) - h(x)$

Aktivitas 6

Mengalikan Polinomial

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menemukan strategi untuk melakukan perkalian polinomial dengan mengacu pada model luas daerah dan tabel.

Bapak/Ibu Guru, mintalah peserta didik untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Mengalikan Dua Polinomial secara berkelompok. Alternatif penyelesaian kegiatan eksplorasi tersebut adalah sebagai berikut.



Eksplorasi

Mengalikan Dua Polinomial

1. Model luas daerah yang diberikan sama dengan hasil pada tabel berikut.

	10	6
10	100	60
2	20	12

Setiap sel dalam tabel tersebut menunjukkan luas daerah dari setiap bagian daerahnya. Perkalian 16×12 juga dapat ditentukan hasilnya dengan perkalian bersusun berikut.

$$\begin{array}{r}
 16 \\
 \underline{12} \times \\
 32 \\
 192
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{r}
 16 \\
 \underline{12} \times \\
 20 \\
 60 \\
 \underline{100} + \\
 192
 \end{array}$$

Terdapat kesamaan antara cara tabel dan perkalian bersusun, yaitu bilangan-bilangan 12, 20, 60, dan 100 sama-sama muncul dalam kedua cara tersebut.

2. Hasil kali $(x + 6)(x + 2)$ dapat ditentukan seperti berikut.

	x	6
x	x^2	$6x$
2	$2x$	12

Dengan demikian, hasil kalinya adalah

$$(x + 6)(x + 2) = x^2 + 2x + 6x + 12 = x^2 + 8x + 12$$

3. Hasil kalinya dapat ditentukan seperti berikut.

	x	-5
x^2	x^3	$-5x^2$
$3x$	$3x^2$	$-15x$
-1	$-x$	5

Dengan demikian, hasil kalinya adalah

$$\begin{aligned}
 (x - 5)(x^2 + 3x - 1) &= x^3 + 3x^2 - x - 5x^2 - 15x + 5 \\
 &= x^3 - 2x^2 - 16x + 5
 \end{aligned}$$

4. Kesamaannya adalah setiap suku pada bentuk pertama dikalikan dengan setiap suku pada bentuk kedua.
5. Jawaban bervariasi. Misalnya, cara nomor 4 dapat ditulis demikian. Sifat yang digunakan adalah sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

Mintalah beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Setelah itu, Bapak/Ibu perlu memberikan penegasan bagaimana melakukan perkalian polinomial. Berikutnya, ajaklah peserta didik untuk mencermati Contoh 2.6 dan mengerjakan Mari Mencobanya. Mintalah satu atau lebih peserta didik untuk membagikan hasil pekerjaannya. Alternatif penyelesaian Mari Mencoba tersebut adalah sebagai berikut.



Mari Mencoba 2.6

$$\begin{aligned}(4x^2 - x + 3)(x^2 - 1) &= 4x^4 - 4x^2 - x^3 + x + 3x^2 - 3 \\ &= 4x^4 - x^3 - x^2 + x - 3\end{aligned}$$

Terakhir, ajaklah peserta didik untuk mengerjakan kolom Mari Berpikir Kreatif. Kolom ini memandu peserta didik untuk menemukan alternatif strategi untuk mengalikan polinomial, yaitu dengan cara bersusun.



Mari Berpikir Kreatif

Berikut ini strategi perkalian dua polinomial dengan cara bersusun.

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 7 \\ 2x - 5 \\ \hline -5x^2 + 10x - 35 \quad \times \\ 2x^3 - 4x^2 + 14x \\ \hline 2x^3 - 9x^2 + 24x - 35 \quad + \end{array}$$

Subbab C: Pembagian Polinomial

Aktivitas 7

Mengenal Algoritma Pembagian

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menyebutkan algoritma pembagian pada polinomial menggunakan pengetahuannya tentang pembagian pada bilangan.

Bapak/Ibu Guru, mintalah peserta didik untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Membagi Bilangan secara mandiri. Setelah mereka menyelesaikannya, pilihlah beberapa peserta didik untuk membagikan jawabannya. Berikut ini alternatif penyelesaian untuk kegiatan eksplorasi tersebut.



Eksplorasi

Membagi Bilangan

Berikut ini adalah isian lengkap dari tabel yang diberikan.

$\frac{7}{4}$	$1\frac{3}{4}$	$7 = 4 \cdot 1 + 3$
$\frac{13}{5}$	$2\frac{3}{5}$	$13 = 5 \cdot 2 + 3$
$\frac{23}{6}$	$3\frac{5}{6}$	$23 = 6 \cdot 3 + 5$
$\frac{35}{8}$	$4\frac{3}{8}$	$35 = 8 \cdot 4 + 3$
$\frac{57}{10}$	$5\frac{7}{10}$	$57 = 10 \cdot 5 + 7$

Hasil dari kegiatan eksplorasi tersebut perlu digunakan oleh Bapak/Ibu Guru sebagai pintu masuk untuk membahas algoritma pembagian. Mintalah peserta didik untuk mempelajari Sifat 2.2 secara cermat. Setelah itu, demonstrasikan contoh penggunaan algoritma pembagian tersebut untuk pembagian polinomial. Misalnya,

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 8}{x + 3} = x^2 + x + 2 + \frac{2}{x + 3}$$

atau

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 8 = (x + 3)(x^2 + x + 2) + 2$$

Setelah itu, ajaklah peserta didik untuk mengerjakan kolom Mari Berpikir Kritis. Berikut alternatif penyelesaian kolom tersebut.



Mari Berpikir Kritis

Untuk menunjukkan $x^3 + 4x^2 + 5x + 8 = (x + 3)(x^2 + x + 2) + 2$, kita dapat menjabarkan bentuk di ruas kanan sehingga menjadi bentuk di ruas kiri seperti berikut.

$$\begin{aligned}(x + 3)(x^2 + x + 2) + 2 &= x^3 + x^2 + 2x + 3x^2 + 3x + 6 + 2 \\ &= x^3 + 4x^2 + 5x + 8\end{aligned}$$

Terbukti bahwa persamaan yang diberikan benar untuk sembarang bilangan real x .

Aktivitas 8

Melakukan Pembagian Polinomial Bersusun

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menemukan strategi pembagian polinomial dengan cara bersusun dengan menggunakan pengetahuan awalnya tentang pembagian bersusun pada bilangan.

Bapak/Ibu Guru, mulailah Aktivitas 8 ini dengan membagi peserta didik menjadi beberapa kelompok. Mintalah setiap kelompok untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Melakukan Pembagian Polinomial Bersusun. Setelah itu, undanglah beberapa kelompok untuk menyajikan jawabannya. Berikut ini alternatif penyelesaian kegiatan eksplorasi tersebut.

**Melakukan Pembagian Polinomial Bersusun**

1. Pembagian 297 oleh 14 dapat dilakukan dengan cara bersusun sebagai berikut.

$$\begin{array}{r} 21 \\ 14 \overline{) 297} \\ \underline{28} \\ 17 \\ \underline{14} \\ 3 \end{array}$$

2. Dengan menggunakan cara yang serupa dengan pembagian bersusun pada bilangan (sebelah kiri), pembagian polinomial $x^3 + 4x^2 + 5x + 8$ oleh $x + 3$ dapat dilakukan seperti berikut (sebelah kanan).

$$\begin{array}{r} 112 \\ 13 \overline{) 1.458} \\ \underline{13} \\ 15 \\ \underline{13} \\ 28 \\ \underline{26} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + x + 2 \\ x + 3 \overline{) x^3 + 4x^2 + 5x + 8} \\ \underline{x^3 + 3x^2} \\ x^2 + 5x \\ \underline{x^2 + 3x} \\ 2x + 8 \\ \underline{2x + 6} \\ 2 \end{array}$$

Selanjutnya, Bapak/Ibu Guru perlu meminta peserta didik untuk mencermati Contoh 2.7. Contoh tersebut menegaskan bagaimana melakukan pembagian polinomial dengan cara bersusun. Bapak/Ibu Guru sebaiknya menggunakan contoh itu untuk mendemonstrasikan pembagian dengan cara bersusun secara klasikal.

Setelah peserta didik memahami cara melakukan pembagian bersusun, ajaklah mereka untuk mengerjakan Mari Mencoba 2.7. Setelah

itu, pilihlah satu atau beberapa peserta didik untuk menyampaikan hasil pekerjaannya. Alternatif penyelesaiannya kurang lebih seperti berikut.



Mari Mencoba 2.7

Pembagian $P(x) = x^3 - x + 9$ oleh $Q(x) = x^2 - 2x + 3$ dilakukan seperti berikut.

$$\begin{array}{r}
 x + 2 \\
 x^2 - 2x + 3 \overline{) x^3 + 0x^2 - x + 9} \\
 \underline{x^3 - 2x^2 + 3x} \\
 2x^2 - 4x + 9 \\
 \underline{2x^2 - 4x + 6} \\
 3
 \end{array}$$

Perhatikan bahwa polinomial $x^3 - x + 9$ perlu ditulis ke dalam bentuk $x^3 + 0x^2 - x + 9$ terlebih dahulu sebelum dilakukan pembagian bersusun. Hasil pembagian tersebut dapat dituliskan sebagai berikut.

$$x^3 - x + 9 = (x^2 - 2x + 3)(x + 2) + 3$$

Selanjutnya, mintalah peserta didik untuk mengerjakan kolom Mari Berpikir Kreatif secara berkelompok. Setelah itu, pilihlah satu atau beberapa kelompok untuk menyampaikan hasil pekerjaannya.



Mari Berpikir Kreatif

1. Hasil bagi dan sisa pembagian $(x^3 - 1) : (x - 1)$ secara berturut-turut adalah $x^2 + x + 1$ dan 0. Untuk $(x^4 - 1) : (x - 1)$, hasil bagi dan sisanya secara berturut-turut adalah $x^3 + x^2 + x + 1$ dan 0.
2. Berdasarkan hasil pada nomor 1, dapat diduga bahwa hasil bagi dan sisa $(x^8 - 1) : (x - 1)$ secara berturut-turut adalah $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ dan 0.

3. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa untuk sembarang bilangan asli n , pembagian $x^n - 1$ oleh $x - 1$ menghasilkan $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$ dan sisa 0. Buktinya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) + 0 \\&= x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - x - 1 \\&= x^n - 1\end{aligned}$$

Perkalian tersebut juga dapat dilakukan dengan cara bersusun seperti berikut.

$$\begin{array}{r}x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1 \\ \hline \phantom{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1} x - 1 \\ \hline -x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - x^2 - x - 1 \\ \hline x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x \\ \hline x^n + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 - 1\end{array}$$

Aktivitas 9

Menemukan Metode Horner

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menemukan strategi pembagian polinomial menggunakan metode Horner dengan menyederhanakan proses pembagian bersusun, kemudian menerapkannya untuk melakukan pembagian polinomial.

Mintalah peserta didik (secara berpasangan) untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Membagi Polinomial dengan Metode Horner. Setelah itu, pilihlah satu atau beberapa pasangan untuk menyampaikan hasil pekerjaannya. Alternatif penyelesaian kegiatan eksplorasi tersebut adalah sebagai berikut.



Membagi Polinomial dengan Metode Horner

Berikut ini perbandingan pembagian bersusun dan metode Horner.

Pembagian Bersusun

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} 1x^2 + 2x - 3 \\ x - 2 \end{array} \overline{) x^3 + 0x^2 - 7x + 8} \\
 \underline{x^3 - 2x^2} - \\
 2x^2 - 7x - \\
 \underline{2x^2 - 4x} - \\
 -3x + 8 - \\
 \underline{-3x + 6} - \\
 2
 \end{array}$$

Metode Horner

$$\begin{array}{c|cccc}
 2 & 1 & 0 & -7 & 8 \\
 & & 2 & 4 & -6 \\
 \hline
 & 1 & 2 & -3 & 2
 \end{array}$$

1. Kesamaannya terletak pada bilangan-bilangan yang ditandai dengan warna yang sama.
2. Perbedaannya, penulisan metode Horner lebih ringkas daripada cara bersusun. Dalam cara bersusun, polinomial yang dibagi dan hasil baginya ditulis lengkap, sedangkan dalam metode Horner ditulis koefisiennya saja. Di dalam cara bersusun, pembagiannya juga ditulis lengkap $x - 2$, tetapi di metode Horner hanya ditulis 2. Terakhir, operasi yang digunakan pada baris-baris pembagian bersusun adalah pengurangan, sedangkan metode Horner menggunakan penjumlahan.
3. Langkah-langkah melakukan metode Horner dirangkum sebagai berikut.

Koefisien polinomial yang dibagi

$$\begin{array}{c|cccc}
 2 & 1 & 0 & -7 & 8 \\
 & & 2 & 4 & -6 \\
 \hline
 & 1 & 2 & -3 & 2
 \end{array}$$

+ sisa

Koefisien hasil bagi

Dari gambar tersebut, tanda panah vertikal merepresentasikan penjumlahan, sedangkan tanda panah diagonal merepresentasikan perkalian dengan 2.

Bapak/Ibu Guru, gunakan Contoh 2.8 untuk mendemonstrasikan kepada peserta didik bagaimana melakukan pembagian polinomial dengan metode Horner. Jelaskan secara detail langkah-langkahnya. Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 2.8. Kemudian, undanglah satu atau beberapa peserta didik untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Alternatif penyelesaiannya adalah sebagai berikut.



Mari Mencoba 2.8

Pembagian $x^4 + 4$ oleh $x - 1$ dapat dilakukan seperti berikut.

1	1	0	0	0	4	
		1	1	1	1	
	1	1	1	1	5	+

Dengan demikian, hasil baginya adalah $x^3 + x^2 + x + 1$ dan sisanya adalah 5.

Ketika mengerjakan Mari Mencoba 2.8, kemungkinan jawaban peserta didik masih kurang tepat. Untuk itu, antisipasilah kesalahan atau miskonsepsi tersebut.

Antisipasi Miskonsepsi

Ketika menggunakan metode Horner, kemungkinan ada peserta didik yang tidak menuliskan koefisien polinomial yang dibagi secara lengkap. Misalnya, ketika polinomial yang dibagi adalah $x^4 + 4$, mungkin ada peserta didik yang menuliskan koefisien-koefisiennya menjadi 1 dan 4. Seharusnya koefisien-koefisien yang ditulis adalah 1, 0, 0, 0, dan 4. Untuk itu, Bapak/Ibu Guru perlu memberikan pendampingan kepada peserta didik terkait kemungkinan kesalahan ini.

Pada akhir Aktivitas 9, Bapak/Ibu Guru dapat memberikan tugas pada kolom Mari Berkolaborasi untuk dikerjakan peserta didik di rumahnya.



Mari Berkolaborasi

1. Berikut ini alternatif penyelesaian pada setiap langkah di nomor 1.

- Karena $2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, maka $a = 2$ dan $c = \frac{1}{2}$.
- Pembagian $2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ oleh $x - \frac{1}{2}$ dengan metode Horner ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & -5 & 4 & -3 \\ & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 2 & -4 & 2 & -2 \end{array} +$$

Dengan demikian, $2x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4x + 2) - 2$.

- Berdasarkan bagian (b), polinomial $2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ dapat dituliskan seperti berikut.

$$\begin{aligned} 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4x + 2) - 2 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)2(x^2 - 2x + 1) - 2 \\ &= (2x - 1)(x^2 - 2x + 1) - 2 \end{aligned}$$

- Hasil bagi dan sisa pembagian $2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ oleh $2x - 1$ secara berturut-turut adalah $x^2 - 2x + 1$ dan -2 .
2. Setiap langkah di nomor 2 memiliki alternatif penyelesaian sebagai berikut.

- Pembagian $x^4 - 10x^2 - 5x + 10$ dengan $x - 1$ dengan metode Horner ditunjukkan seperti berikut.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & -10 & -5 & 10 \\ & & 1 & 1 & -9 & -14 \\ \hline & 1 & 1 & -9 & -14 & -4 \end{array} +$$

Dengan demikian, $x^4 - 10x^2 - 5x + 10 = (x - 1)(x^3 + x^2 - 9x - 14) - 4$.

- b. Selanjutnya, kita membagi $x^3 + x^2 - 9x - 14$ dengan $x - 3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 1 & -9 & -14 \\ & & 3 & 12 & 9 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & -5 \end{array} +$$

Dengan demikian, $x^3 + x^2 - 9x - 14 = (x - 3)(x^2 + 4x + 3) - 5$.

- c. Berdasarkan bagian (a) dan (b), polinomial $x^4 - 10x^2 - 5x + 10$ dapat dituliskan menjadi seperti berikut.

$$\begin{aligned} x^4 - 10x^2 - 5x + 10 &= (x - 1)[(x - 3)(x^2 + 4x + 3) - 5] - 4 \\ &= (x - 1)(x - 3)(x^2 + 4x + 3) - 5(x - 1) - 4 \\ &= (x - 1)(x - 3)(x^2 + 4x + 3) - 5x + 1 \end{aligned}$$

- d. Jadi, hasil bagi dan sisa dari pembagian $x^4 - 10x^2 - 5x + 10$ oleh $(x - 1)(x - 3)$ secara berturut-turut adalah $x^2 + 4x + 3$ dan $-5x + 1$.

Aktivitas 10

Menemukan Teorema Sisa

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menemukan Teorema Sisa melalui kegiatan penemuan terbimbing, kemudian menggunakan teorema tersebut untuk menyelesaikan masalah.

Bapak/Ibu Guru, mintalah peserta didik untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Membagi Polinomial dan Menentukan Nilai Fungsi Polinomial secara berkelompok. Setelah itu, mintalah satu atau beberapa kelompok untuk menyampaikan hasil pekerjaannya.

Alternatif penyelesaian kegiatan eksplorasi tersebut adalah sebagai berikut.



Membagi Polinomial dan Menentukan Nilai Fungsi Polinomial

- Berikut ini adalah tabel yang sudah dilengkapi.

$P(x)$	Pembagi	Sisa	$P(c)$
$P(x) = x^2 + 4x - 16$	$x - 3$	5	$P(3) = 5$
$P(x) = x^2 - 2x - 14$	$x - 1$	-15	$P(1) = -15$
$P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 11$	$x + 2$	7	$P(-2) = 7$
$P(x) = x^3 + 7x^2 - 4x - 28$	$x + 7$	0	$P(-7) = 0$
$P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x - 10$	x	-10	$P(0) = -10$
- Pada baris yang sama, nilai pada kolom ketiga dalam tabel tersebut selalu sama dengan kolom keempat. Berdasarkan pengamatan ini, diduga bahwa sisa pembagian suatu polinomial $P(x)$ oleh $x - c$ sama dengan nilai polinomial tersebut ketika $x = c$.
- Setuju, karena dugaannya sama dengan dugaan pada nomor 2. Misalkan $P(x)$ dibagi dengan $x - c$ memiliki hasil bagi $H(x)$ dan sisa S . Hal tersebut dapat dituliskan dalam bentuk algoritma pembagian berikut.

$$P(x) = (x - c) \cdot H(x) + S$$

Dengan demikian, nilai $P(c)$ dapat ditentukan seperti berikut.

$$P(c) = (c - c) \cdot H(c) + S = 0 \cdot H(c) + S = 0 + S = S$$

Terbukti bahwa sisa pembagiannya sama dengan nilai $P(c)$.

Hubungkan apa yang ditemukan peserta didik dalam kegiatan eksplorasi tersebut dengan Teorema Sisa dalam Sifat 2.3. Setelah itu, gunakan Contoh 2.9 untuk mendemonstrasikan penggunaan teorema

tersebut dalam penentuan nilai fungsi polinomial. Selanjutnya, mintalah peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 2.9 secara mandiri. Setelah menyelesaikannya, mintalah satu atau beberapa peserta didik untuk menyampaikan hasil pekerjaannya. Alternatif penyelesaian Mari Mencoba tersebut adalah sebagai berikut.



Mari Mencoba 2.9

Berikut ini adalah metode Horner yang digunakan untuk menentukan hasil bagi dan sisa pembagian $P(x) = 3x^5 - 20x^4 - 6x^3 - 48x - 8$ oleh $x - 7$.

7	3	-20	-6	0	-48	-8	
		21	7	7	49	7	
	3	1	1	7	1	-1	+

Hasil bagi dan sisanya secara berturut-turut adalah $3x^4 + x^3 + x^2 + 7x + 1$ dan -1 . Dengan menggunakan Teorema Sisa, kita peroleh $P(7) = -1$.

Mintalah peserta didik untuk mengerjakan kolom Mari Mengomunikasikan. Setelah itu, undanglah peserta didik untuk mengajukan diri menjawab soal dalam kolom tersebut. Bapak/Ibu dapat memberikan nilai tambahan bagi peserta didik yang menjawab soal tersebut.



Mari Mengomunikasikan

Misalkan polinomial $P(x)$ dibagi $ax - b$ menghasilkan $H(x)$ dan sisa S . Hal ini dapat dinyatakan dalam bentuk algoritma pembagian berikut.

$$P(x) = (ax - b) \cdot H(x) + S$$

Oleh karena itu, nilai $P\left(\frac{b}{a}\right)$ dapat ditentukan sebagai berikut.

$$P\left(\frac{b}{a}\right) = \left(a \cdot \left(\frac{b}{a}\right) - b\right) \cdot H\left(\frac{b}{a}\right) + S = (b - b) \cdot H\left(\frac{b}{a}\right) + S = 0 + S = S$$

Jadi, terbukti bahwa dugaan Ahmad benar, yaitu jika polinomial $P(x)$ dibagi dengan $ax - b$, maka sisanya adalah $P\left(\frac{b}{a}\right)$.

Terakhir, ceritakan kolom Matematika dalam Budaya: Berkunjung ke Candi Borobudur. Dengan cerita tersebut, peserta didik diharapkan menyadari betapa bermanfaatnya fungsi polinomial dalam memodelkan permasalahan yang melibatkan budaya di Indonesia.

Subbab D: Faktor dan Pembuat Nol Polinomial

Aktivitas 11

Mencermati dan Memilih Pembagian Polinomial

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat mencermati dan memilih pembagian polinomial, serta bernalar atas pilihannya.

Bapak/Ibu Guru, Aktivitas 11 ini merupakan pemanasan terhadap aktivitas-aktivitas pembelajaran berikutnya. Untuk melakukannya, mintalah peserta didik mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Mencermati dan Memilih Pembagian Polinomial. Setelah itu, undanglah beberapa peserta didik untuk membagikan hasil pekerjaannya. Berikut ini alternatif penyelesaian kegiatan eksplorasi tersebut.



Eksplorasi

Mencermati dan Memilih Pembagian Polinomial

Pilihan peserta didik akan bervariasi. Berikut ini contoh alasan sehingga peserta didik memilih setiap pembagian polinomialnya.

1. $\frac{x^2 + 4x - 2}{x - 1} = x + 5 + \frac{3}{x - 1}$

Dibandingkan pilihan lain, pembagian ini menghasilkan sisa bilangan positif.

2. $\frac{2x^2 + 9x + 4}{x + 3} = 2x + 3 - \frac{5}{x + 3}$

Dibandingkan pilihan lain, pembagian ini menghasilkan sisa bilangan negatif.

$$3. \frac{x^2 - x - 12}{x - 4} = x + 3$$

Dibandingkan pilihan lain, pembagian ini tidak memiliki sisa. Dengan kata lain, sisa pembagiannya adalah nol.

$$4. \frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 1} = x - 2 + \frac{2x - 1}{x^2 + 2x - 1}$$

Dibandingkan pilihan lain, pembagian ini sisanya berupa polinomial berderajat satu.

Aktivitas 12

Menemukan Teorema Faktor

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menemukan Teorema Faktor melalui kegiatan penemuan terbimbing, dan menggunakannya untuk memfaktorkan polinomial secara lengkap.

Bapak/Ibu Guru, mintalah peserta didik untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Menuju Teorema Faktor secara berkelompok. Setelah itu, undanglah satu atau beberapa kelompok untuk menyampaikan hasil pekerjaannya. Berikut ini alternatif penyelesaian kegiatan eksplorasi tersebut.



Eksplorasi

Menuju Teorema Faktor

1. Berikut ini adalah isian tabel yang diberikan.

$P(x)$	c	$P(c)$	$P(x) = (x - c) \cdot H(x) + S(x)$
$P(x) = x^2 - x - 12$	4	0	$P(x) = (x - 4)(x + 3) + 0$
$P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$	-3	0	$P(x) = (x + 3)(x^2 - 9) + 0$
$P(x) = x^4 - 16$	-2	0	$P(x) = (x + 2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8) + 0$

2. Dugaan Ambar benar. Jika c adalah pembuat nol P , maka $P(c) = 0$. Berdasarkan Teorema Sisa, sisa pembagian $P(x)$ dengan $x - c$ adalah 0. Hal ini dapat dituliskan menjadi $P(x) = (x - c) \cdot H(x) + 0 = (x - c)H(x)$. Jadi, $x - c$ adalah faktor dari $P(x)$.
3. Dugaan Ambar benar. Jika $x - c$ faktor dari polinomial $P(x)$, maka $P(x)$ dapat dituliskan menjadi $P(x) = (x - c) \cdot H(x)$. Jika kita substitusi $x = c$ ke dalam persamaan tersebut, diperoleh $P(c) = (c - c) \cdot H(c) = 0 \cdot H(c) = 0$. Jadi, c adalah pembuat nol dari P .

Bapak/Ibu Guru selanjutnya perlu menghubungkan hasil eksplorasi tersebut dengan Teorema Faktor, seperti yang dirangkum dalam Sifat 2.4. Setelah itu, gunakan Contoh 2.10 untuk mendemonstrasikan bagaimana menggunakan teorema tersebut untuk memfaktorkan sebuah polinomial secara lengkap. Setelah peserta didik memahaminya, mintalah mereka untuk mengerjakan Mari Mencoba 2.10 dan membagikan hasil pekerjaannya. Berikut ini alternatif penyelesaian Mari Mencoba tersebut.



Mari Mencoba 2.10

Dengan menggunakan metode Horner, kita akan menunjukkan bahwa $P(-1) = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -1 & 1 & -2 & -21 & -18 \\
 & & -1 & 3 & 18 \\
 \hline
 & 1 & -3 & -18 & 0
 \end{array} +$$

Dari metode Horner tersebut, kita memperoleh hasil bagi $x^2 - 3x - 18$ dan sisa 0. Dengan menggunakan Teorema Sisa, maka $P(-1) = 0$. Selanjutnya, kita memfaktorkan $P(x)$ secara lengkap.

$$\begin{aligned}
 P(x) &= x^3 - 2x^2 - 21x - 18 \\
 &= (x + 1)(x^2 - 3x - 18) \\
 &= (x + 1)(x + 3)(x - 6)
 \end{aligned}$$

Mintalah peserta didik untuk mengerjakan kolom Mari Berpikir Kritis, kemudian pilihlah beberapa peserta didik untuk membagikan hasil pekerjaannya. Alternatif penyelesaiannya sebagai berikut.



Mari Berpikir Kritis

1. Misalkan $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$. Karena jumlah semua koefisien dan konstantanya nol, maka $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + a_0 = 0$. Selanjutnya, kita tentukan $P(1)$.

$$\begin{aligned} P(1) &= a_n 1^n + a_{n-1} 1^{n-1} + a_{n-2} 1^{n-2} + \dots + a_1 1 + a_0 \\ &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + a_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena $P(1) = 0$, maka berdasarkan Teorema Faktor, $x - 1$ adalah faktor dari $P(x)$. Jadi, dugaan Ajeng terbukti, yaitu jika jumlah semua koefisien dan konstanta dari suatu polinomial sama dengan nol, maka $x - 1$ merupakan faktor dari polinomial tersebut.

2. Prinsip Ajeng benar. Misalkan $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ dan jumlah koefisien suku-suku yang eksponen variabelnya genap sama dengan yang ganjil. Selanjutnya, kita tentukan $P(-1)$.

$$P(-1) = a_n (-1)^n + a_{n-1} (-1)^{n-1} + a_{n-2} (-1)^{n-2} + \dots + a_1 (-1) + a_0$$

Jika $P(x)$ berderajat ganjil (n ganjil), maka nilai $P(-1)$ menjadi seperti berikut.

$$\begin{aligned} P(-1) &= -a_n + a_{n-1} - a_{n-2} + \dots - a_1 + a_0 \\ &= (a_{n-1} + \dots + a_0) - (a_n + a_{n-2} + \dots + a_1) \end{aligned}$$

Dengan kata lain, $P(-1)$ sama dengan jumlah koefisien suku-suku yang eksponen variabelnya genap dikurangi jumlah koefisien suku-suku yang eksponen variabelnya ganjil. Karena diketahui bahwa jumlah koefisien suku-suku yang eksponen variabelnya genap sama dengan yang ganjil, maka $P(-1) = 0$. Dengan cara yang sama juga dapat dibuktikan untuk $P(x)$ yang berderajat genap. Jadi, prinsip Ajeng terbukti benar.

Setelah itu, bahaslah Sifat 2.5 tentang pembuat nol rasional. Sifat tersebut sangat membantu peserta didik untuk menemukan pembuat nol rasional dari suatu polinomial. Gunakan Contoh 2.11 untuk mendemonstrasikan penerapan Sifat 2.5 tersebut untuk memfaktorkan suatu polinomial secara lengkap.

Setelah peserta didik memahami cara memfaktorkan polinomial, mintalah mereka untuk mengerjakan Mari Mencoba 2.11 dan bahaslah Mari Mencoba tersebut. Berikut ini alternatif penyelesaiannya.



Mari Mencoba 2.11

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20 = (x - 2)^2(2x + 5)$. Sebagai catatan, pembuat nol P adalah 2 dan $-\frac{5}{2}$. Semua pembuat nol tersebut sejalan dengan Sifat 2.5, yaitu pembilangnya merupakan faktor dari 20 dan penyebutnya merupakan faktor dari 2.

Aktivitas 13

Menemukan Hubungan antara Faktor Fungsi Polinomial dan Grafiknya

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menemukan hubungan antara faktor-faktor fungsi polinomial dan grafik fungsi tersebut.

Bapak/Ibu Guru, mintalah peserta didik untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Menemukan Koneksi antara Faktor Fungsi Polinomial dan Grafiknya secara berkelompok. Setelah itu, undanglah satu atau beberapa kelompok untuk menyampaikan dan menjelaskan hasil pekerjaannya. Berikut ini alternatif penyelesaian untuk kegiatan eksplorasi tersebut.



Menemukan Koneksi antara Faktor Fungsi Polinomial dan Grafiknya

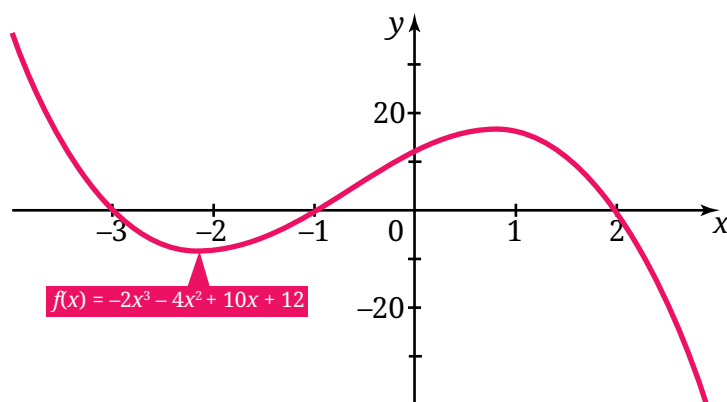
1. Berikut ini adalah tabel yang sudah dilengkapi.

Fungsi Polinomial	Grafik
$f(x) = x^2 - x - 2$ Bentuk pemfaktoran: $f(x) = (x + 1)(x - 2)$	
$g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ Bentuk pemfaktoran: $g(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$	

2. Dari hasil pada nomor 1, dapat disimpulkan bahwa faktor-faktor polinomial bersesuaian dengan perpotongan grafik fungsi polinomial tersebut terhadap sumbu- x . Berdasarkan Teorema Faktor, faktor-faktor dari polinomial berhubungan dengan pembuat nol polinomial tersebut. Jika digambarkan di dalam bidang koordinat, pembuat nol tersebut direpresentasikan sebagai titik potong dengan sumbu- x .

Lakukan penegasan terhadap penemuan peserta didik melalui eksplorasi tersebut. Gunakan sifat hasil kali nol (seperti yang dijelaskan dalam Buku Siswa) sebagai dukungan dalam memberikan penegasan tersebut.

Setelah itu, gunakan Contoh 2.12 untuk mendemonstrasikan bagaimana menentukan perpotongan grafik fungsi polinomial terhadap sumbu- x . Sebagai penjasas, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan grafik fungsi f untuk menunjukkan letak perpotongan grafik fungsi tersebut terhadap sumbu- x . Grafiknya ditunjukkan pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Grafik Fungsi $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 10x + 12$

Selanjutnya, mintalah peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 2.12. Undanglah satu atau beberapa peserta didik untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Berikut ini alternatif penyelesaian untuk Mari Mencoba tersebut.



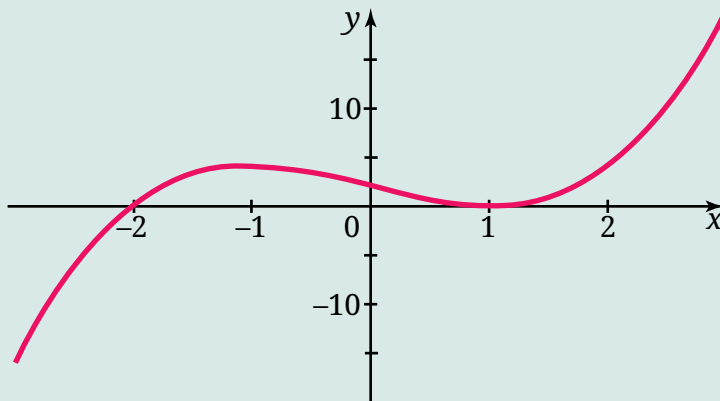
Mari Mencoba 2.12

Untuk menentukan perpotongannya dengan sumbu- x , pertama-tama kita mencari pembuat nol dari $g(x)$.

$$x^3 - 3x + 2 = 0 \quad \text{Menentukan pembuat nol } g(x)$$

$$(x + 2)(x - 1)^2 = 0 \quad \text{Faktorkan}$$

Berdasarkan sifat hasil kali nol, pembuat nolnya adalah $x = -2$ dan $x = 1$. Dengan demikian, perpotongan grafik fungsi g dengan sumbu- x adalah $(-2, 0)$ dan $(1, 0)$. Hal ini ditunjukkan pada Gambar 2.8 berikut.



Gambar 2.8 Grafik Fungsi $g(x) = x^3 - 3x + 2$

Alternatif Pembelajaran

Aktivitas 13 dapat dilakukan dengan menggunakan bantuan media pembelajaran digital. Untuk melakukannya, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan media berjudul “Pembuat Nol, Persamaan, dan Grafik Fungsi Polinomial”. Untuk mengaksesnya, silakan kunjungi tautan <https://s.id/nol-polinom> atau pindai kode respons cepat di samping. Sebagai panduan pengelolaan kelas dalam menggunakan media pembelajaran digital tersebut, silakan menonton videonya melalui tautan berikut.



<https://youtu.be/CDKQh011k64>

Subbab E: Identitas Polinomial

Aktivitas 14

Membuktikan Identitas Polinomial

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menggunakan identitas polinomial untuk menyederhanakan polinomial dan membuktikan identitas polinomial lainnya.

Bapak/Ibu Guru, berikan motivasi kepada peserta didik bahwa materi yang akan mereka pelajari, yaitu identitas polinomial, dapat digunakan untuk bermain sulap. Untuk itu, mintalah mereka untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Bermain Sulap Menggunakan Identitas Polinomial secara berpasangan. Pilihlah beberapa peserta didik untuk menyampaikan hasil pekerjaannya. Berikut ini alternatif penyelesaian kegiatan eksplorasi tersebut.



Eksplorasi

Bermain Sulap Menggunakan Identitas Polinomial

- $[(x + 1)(x - 1) + 11] - x^2$
- Bentuk aljabar pada bagian (a) dapat disederhanakan seperti berikut.

$$\begin{aligned} [(x + 1)(x - 1) + 11] - x^2 &= [(x^2 - 1) + 11] - x^2 \\ &= x^2 + 10 - x^2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa untuk sembarang bilangan real x , hasilnya selalu sama dengan 10.

- Akan ditunjukkan bahwa $[(x + 1)(x - 1) + 11] - x^2 = 10$ setara dengan $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

$$[(x + 1)(x - 1) + 11] - x^2 = 10$$

$$(x + 1)(x - 1) + 11 - x^2 = 10$$

$$(x + 1)(x - 1) = 10 - 11 + x^2$$

$$(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$$

- Jawaban bervariasi.

Jelaskan kepada peserta didik bahwa mereka telah menggunakan identitas polinomial untuk bermain sulap melalui kegiatan eksplorasi sebelumnya. Setelah itu, jelaskan beberapa identitas polinomial lainnya. Identitas-identitas tersebut dirangkum dalam Sifat 2.6.

Gunakan Contoh 2.13 dan 2.14 untuk menjelaskan bagaimana menggunakan identitas-identitas polinomial dalam pembuktian identitas lainnya dan penyederhanaan sebuah polinomial. Setelah mereka memahaminya, mintalah mereka untuk mengerjakan Mari Mencoba di kedua contoh tersebut. Berikut ini alternatif penyelesaiannya.



Mari Mencoba 2.13

1. Bukan identitas polinomial karena ada $m = 1$ sedemikian sehingga $(2 \cdot 1 - 3)^3 = -1 \neq -19 = 8 \cdot 1^3 - 27$.
2. Persamaan yang diberikan merupakan identitas polinomial. Untuk membuktikannya, bentuk di ruas kiri perlu dijabarkan dan hasilnya sama dengan bentuk di ruas kanan.

$$(2x - 3)^2 + 5 = 4x^2 - 12x + 9 + 5 = 4x^2 - 12x + 14$$

Alternatif penyelesaian untuk Mari Mencoba 2.14 adalah sebagai berikut.



Mari Mencoba 2.14

Bentuk pemfaktornya adalah $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$.

Jika memungkinkan, mintalah peserta didik untuk mengerjakan kolom Mari Berkolaborasi. Di kolom ini, peserta didik berpasangan untuk membuat dan membuktikan identitas-identitas polinomial.

F. Tindak Lanjut

Untuk mengetahui ketercapaian tujuan pembelajaran pada setiap subbab, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan soal-soal dalam subbab tersebut. Gunakan skor pengerjaan terhadap soal-soal latihan tersebut untuk menentukan apakah peserta didik siap melanjutkan ke pembahasan selanjutnya. Jika belum siap, Bapak/Ibu

dapat membuat kelompok-kelompok belajar agar peserta didik dalam tiap-tiap kelompok tersebut dapat belajar bersama.

Bapak/Ibu juga dapat memberikan pengayaan kepada peserta didik yang sesuai. Pengayaan ini dapat diambil dari fitur Pengayaan: Menulis Artikel Berita dalam Buku Siswa. Di dalam pengayaan tersebut, peserta didik menginterpretasi model polinomial terhadap rata-rata harga tiap unit perumahan dan menuliskan hasilnya sebagai artikel berita. Peserta didik kemudian membagikan artikelnya tersebut melalui media sosial mereka.

G. Asesmen Sumatif

Terdapat dua bagian dalam Buku Siswa yang dapat digunakan sebagai asesmen sumatif, yaitu Uji Kompetensi dan Proyek. Bapak/Ibu Guru dapat mendesain rubrik penilaian secara mandiri terkait dengan asesmen sumatif tersebut sehingga rubriknya sesuai dengan kebutuhan masing-masing. Dalam mendesain rubrik tersebut, Bapak/Ibu dapat mengacu pada bagian Kunci Jawaban.

Misalnya, selain mengerjakan fitur Proyek, Bapak/Ibu Guru juga meminta peserta didik untuk mempresentasikan hasilnya ke dalam poster. Contoh rubrik poster tersebut kurang lebih seperti berikut.

Tabel 2.1 Contoh Rubrik Penilaian

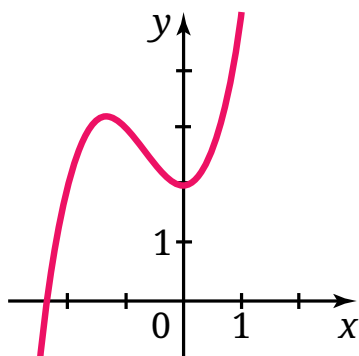
Aspek	Kurang	Cukup	Baik
Akurasi Jawaban (50%)	Semua atau sebagian besar jawaban tidak akurat.	Sebagian besar jawaban akurat.	Semua jawaban akurat.
Organisasi Penyajian (30%)	Penyajian tidak mudah diikuti oleh pembaca.	Pembaca cukup sulit mengikuti alur penyajiannya.	Pembaca dengan mudah mengikuti alur penyajiannya.

Aspek	Kurang	Cukup	Baik
Gambar (10%)	Tidak ada gambar, atau jikapun ada, hanya sebagian kecil yang dapat memperkuat pesan yang ingin disampaikan.	Sebagian besar gambar memperkuat pesan yang ingin disampaikan.	Semua gambar memperkuat pesan yang ingin disampaikan.
Tulisan (10%)	Banyak kekeliruan penulisan dalam poster.	Terdapat sedikit kekeliruan penulisan.	Tidak ada kekeliruan penulisan.

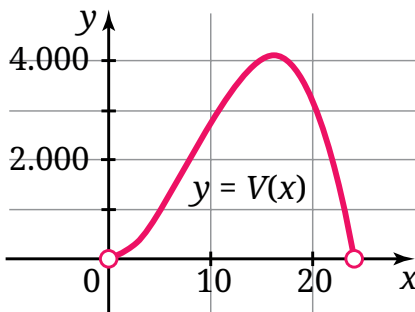
H. Kunci Jawaban

1. Latihan A Polinomial dan Fungsi Polinomial

1. Benar. Bentuk aljabar yang diberikan merupakan penjumlahan dari 3 monomial.
2. Salah. Karena $f(-2) = -10$, grafik f tidak melalui titik $(-2, 18)$, tetapi melalui titik $(-2, -10)$.
3. Ke kiri atas, ke kanan bawah ($\nwarrow, \searrow$)
4. a. polinomial; b. polinomial; c. bukan polinomial
5. a. 6; b. 4; c. 4
6. Grafik fungsi f ditunjukkan seperti berikut.



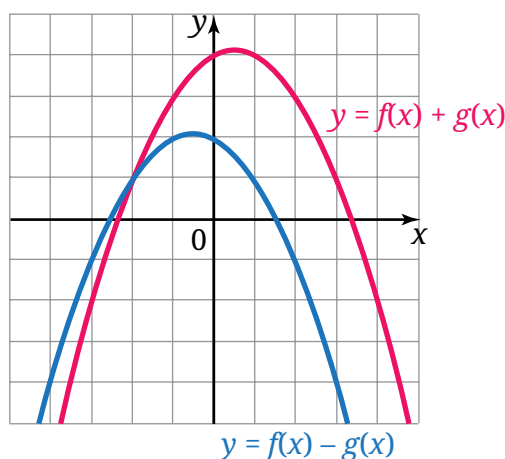
7. Grafik C karena fungsi P berderajat genap dan memiliki koefisien utama negatif sehingga perilaku ujung grafiknya ke kiri bawah dan ke kanan bawah ($\swarrow, \searrow$).
8. Tampilan kalkulator grafik yang digunakan Galang kurang besar. Agar tampilannya sesuai dengan perilaku ujung-ujungnya, Galang sebaiknya memperbesar tampilan di sumbu- x , misalnya dimulai dari $x = -5$ sampai $x = 10$.
9. a. $V(x) = 48x^2 - 2x^3$
 b. Grafiknya belum tepat karena daerah asal fungsi V adalah $\{x \mid 0 < x < 24, x \in \mathbb{R}\}$. Dengan demikian, grafiknya seharusnya seperti berikut.



- c. Volume maksimumnya sekitar 4.000 cm^3 lebih sedikit. (Secara eksak, volume maksimumnya adalah 4.096 cm^3 ketika $x = 16 \text{ cm}$.)

2. Latihan B Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Polinomial

1. Distributif.
2. Salah. Karena jika kita memilih polinomial pertamanya $2x - 3$ dan polinomial keduanya $x + 5$, operasi $(2x - 3) - (x + 5) \neq -[(2x - 3) + (x + 5)]$.
3. Salah. Karena seharusnya $(5x - 1) - (3x - 4) = 5x - 1 - 3x + 4$.
4. a. $3m^2n + 2m^2n - mn^2 + mn - 12 + 7 = 5m^2n - mn^2 + mn - 5$
 b. $2x^4 - x^4 - x^3 - 2x^3 + x^2 + 4x - 12 + 6 = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 6$
5. Berdasarkan grafik fungsi f dan g yang diketahui, grafik fungsi $f(x) + g(x)$ dan $f(x) - g(x)$ ditunjukkan sebagai berikut.



6. $(3a - b + 2)(a + 2b - 5) = 3a^2 + 5ab - 13a - 2b^2 + 9b - 10$
7. Tidak. Karena jika tanda kotak tersebut diganti dengan -1 , persamaan $A(x) = x^2 - x^{-1} - 2$ bukan merupakan polinomial.
8. (a) Luas daerah yang diarsir dapat ditentukan dengan mengurangi luas persegi panjang besar dengan luas segitiga yang tidak diarsir.

$$L = [3x(x + 3)] - \frac{1}{2} [2x(x + 3)] = 2x^2 + 6x$$

Selain itu, luas juga dapat ditentukan menggunakan rumus luas trapesium.

$$L = \frac{1}{2} (x + 3)(3x + x) = 2x^2 + 6x$$

- (b) Luas daerah yang diarsir dapat ditentukan dengan mengurangi luas daerah persegi besar dengan luas daerah persegi kecil.

$$L = (5x - 1)^2 - x^2 = 24x^2 - 10x + 1$$

9. Misalkan panjang pagar yang mengarah ke timur-barat adalah x dan panjang pagar yang mengarah ke utara-selatan adalah y . Karena biaya pemagaran ke arah timur-barat adalah sebesar Rp1.500,00 per meter, sedangkan yang ke arah utara-selatan adalah Rp1.000,00 per meter, serta anggaran yang tersedia adalah Rp500.000,00, maka hubungan ini dapat dimodelkan sebagai berikut.

$$2(1.500x + 1.000y) = 500.000 \text{ atau } 1.500x + 1.000y = 250.000$$

Dengan menyelesaikan y dalam persamaan tersebut, diperoleh hasil berikut.

$$y = \frac{1}{2}(500 - 3x)$$

Dengan demikian, fungsi luasnya dapat ditentukan sebagai berikut.

$$L = xy = x \left[\frac{1}{2}(500 - 3x) \right] = 250x - \frac{3}{2}x^2$$

3. Latihan C Pembagian Polinomial

1. Benar. Sesuai dengan Sifat 2.2, derajat sisa pembagian selalu kurang dari derajat pembagi.
2. Salah. Bentuk algoritma pembagian berdasarkan hasil dari metode Horner yang diberikan seharusnya menjadi seperti berikut.

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 8x - 10}{x + 5} = x^2 - x + 3 + \frac{5}{x + 5}$$

3. k. Hasil ini sesuai dengan Teorema Sisa.
4. Pembagian $P(x) = x^6 - x^4 + x^2 - 1$ oleh $Q(x) = x^2 + 2x - 1$ dapat dilakukan dengan cara bersusun berikut.

$$\begin{array}{r}
 \overline{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 10x + 25} \\
 x^2 + 2x - 1 \overline{) x^6 + 0x^5 - x^4 + 0x^3 + x^2 + 0x - 1} \\
 \underline{x^6 + 2x^5 - x^4} \\
 -2x^5 + 0x^4 + 0x^3 \\
 \underline{-2x^5 - 4x^4 + 2x^3} \\
 4x^4 - 2x^3 + x^2 \\
 \underline{4x^4 + 8x^3 - 4x^2} \\
 -10x^3 + 5x^2 + 0x \\
 \underline{-10x^3 - 20x^2 + 10x} \\
 25x^2 - 10x - 1 \\
 \underline{25x^2 + 50x - 25} \\
 -60x + 24
 \end{array}$$

Dari pembagian bersusun tersebut diperoleh hasil bagi $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 10x + 25$ dan sisa $-60x + 24$. Dengan demikian, bentuk pembagian tersebut dapat ditulis sebagai berikut.

$$x^6 - x^4 + x^2 - 1 = (x^2 + 2x - 1)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 10x + 25) - 60x + 24$$

Sebagai alternatif, pembagian tersebut juga dapat dilakukan menggunakan metode Horner.

5. Metode Horner yang digunakan untuk melakukan pembagian polinomial-polinomial yang diberikan ditunjukkan seperti berikut.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -3 & 2 & 5 & 2 & 11 & -15 \\
 & & -6 & 3 & -15 & 12 \\
 \hline
 & 2 & -1 & 5 & -4 & -3
 \end{array}$$

Dengan demikian, hasil bagi dan sisa pembagiannya secara berturut-turut adalah $2x^3 - x^2 + 5x - 4$ dan -3 .

6. Pembagian bersusun yang ditampilkan sudah tepat. Kekeliruannya terletak pada pengambilan kesimpulan di metode Horner. Seharusnya, berdasarkan proses metode Horner yang ditampilkan, sisanya adalah $2(x - 1) + 9 = 2x + 7$. (Penjelasan lebih lengkapnya bisa dilihat di kolom Mari Berkolaborasi di subbab ini.)
7. Sisa pembagian $P(x) = 3x^6 - 11x^5 + x^3 + 20x^2 - 3$ oleh $x - \frac{2}{3}$ ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 \frac{2}{3} & 3 & -11 & 0 & 1 & 20 & 0 & -3 \\
 & & 2 & -6 & -4 & -2 & 12 & 8 \\
 \hline
 & 3 & -9 & -6 & -3 & 18 & 12 & 5
 \end{array}$$

Jadi, nilai $P\left(\frac{2}{3}\right) = 5$.

8. Polinomial $P(x)$ jika dibagi $x - 2$ sisanya -3 , dan jika dibagi $x + 3$ sisanya -13 , sehingga dengan menggunakan Teorema Sisa, diperoleh $P(2) = -3$ dan $P(-3) = -13$. Jika $P(x)$ dibagi dengan $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$, sisanya dapat dituliskan menjadi $ax + b$. Dengan algoritma pembagian, hal ini dapat dituliskan menjadi bentuk berikut.

$$P(x) = (x - 2)(x + 3) \cdot H(x) + ax + b$$

Karena $P(2) = -3$ dan $P(-3) = -13$, maka $-3 = 2a + b$ dan $-13 = -3a + b$. Dengan menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut, diperoleh $a = 2$ dan $b = -7$. Jadi, sisa pembagian $P(x)$ oleh $x^2 + x - 6$ adalah $2x - 7$.

$$\begin{aligned}
 9. \quad a. \quad Q(x) &= ((2x - 9)x + 7)x - 10 \\
 &= (2x - 9)x^2 + 7x - 10 \\
 &= 2x^3 - 9x^2 + 7x - 10 \\
 &= P(x)
 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $P(x) = Q(x)$.

b. $P(4) = 2$ dan $Q(4) = 2$.

c. $R(x) = x^4 - 13x^3 + 23x^2 - 12x + 10 = (((x - 13)x + 23)x - 12)x + 10$.
Dengan demikian, $R(11) = -1$.

d. Pembagian $R(x)$ dengan $x - 11$ menggunakan metode Horner ditunjukkan seperti berikut.

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 11 & 1 & -13 & 23 & -12 & 10 & \\
 & & 11 & -22 & 11 & -11 & \\
 \hline
 & 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & +
 \end{array}$$

e. Untuk menentukan $R(11)$, urutan operasi-operasi yang digunakan pada bagian (c) sama dengan langkah-langkah dalam metode Horner pada bagian (d).

4. Latihan D Faktor dan Pembuat Nol Polinomial

1. $(x - 10)$
2. Salah. Jika grafik fungsi polinomial $P(x)$ memotong sumbu- x di titik $(3, 0)$, pembuat nolnya adalah $x = 3$. Dengan demikian, yang menjadi faktor $P(x)$ adalah $x - 3$. Bentuk $x + 3$ belum tentu faktor dari $P(x)$.
3. Salah. Ada fungsi polinomial lainnya, misalnya $Q(x) = 2(x + 7)(x + 3)(x - 2)$.
4. $P(-3) = (-3)^4 - 2(-3)^3 - 13(-3)^2 + 14(-3) + 24$
 $= 81 + 54 - 117 - 42 + 24 = 0$

dan

$$\begin{aligned}
 P(2) &= (2)^4 - 2(2)^3 - 13(2)^2 + 14(2) + 24 \\
 &= 16 - 16 - 52 + 28 + 24 = 0
 \end{aligned}$$

Bentuk pemfaktorrannya adalah $(x - 4)(x - 2)(x + 1)(x + 3)$.

5. $P(x) = (5x - 3)(x - 2)(x - 3)$
6. Grafik $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)^2$ memotong sumbu- x di $(-1, 0)$ dan $(1, 0)$. Karena $f(0) = (0 + 1)^2(0 - 1)^2 = 1$, grafiknya memotong sumbu- y di $(0, 1)$. Karena fungsi polinomial ini berderajat genap dan koefisien utamanya positif, perilaku ujung grafiknya ke kiri atas dan ke kanan atas ($\nearrow, \nearrow$). Dengan demikian, grafik yang tepat adalah grafik (a).
7. Dilihat dari bentuk dan perilaku ujungnya ($\nearrow, \searrow$), grafik yang diberikan merupakan grafik fungsi polinomial berderajat 3 dengan koefisien utama negatif. Dengan demikian, dari pilihan yang diberikan, fungsi yang paling tepat adalah $g(x) = -x^3 - x^2 + 6x$. Selain itu, karena $g(x) = -x^3 - x^2 + 6x = -x(x + 3)(x - 2)$, grafik fungsi ini memotong sumbu- x di $(0, 0)$, $(-3, 0)$, dan $(2, 0)$. Hal ini juga sesuai dengan grafik yang diberikan.
8. Polinomial berderajat 4 yang pembuat nolnya $-3, 0, 1$, dan 4 adalah $P(x) = a(x + 3)x(x - 1)(x - 4) = a(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x)$. Karena koefisien x^2 -nya adalah 11 , maka $a = -1$. Jadi, polinomial tersebut adalah $P(x) = -x^4 + 2x^3 + 11x^2 - 12x$.
9. Jika $x + 2$ dan $x - 3$ adalah faktor dari $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 18$, berdasarkan Teorema Faktor, $P(-2) = 0$ dan $P(3) = 0$. Dengan demikian, diperoleh sistem persamaan linear dua variabel berikut.

$$\begin{cases} 4a - 2b + 2 = 0 \\ 9a + 3b + 72 = 0 \end{cases}$$

Dengan menyelesaikan sistem tersebut, diperoleh $a = -5$ dan $b = -9$.

10. Diketahui sebuah peti kemas memiliki panjang 1 meter lebih dari dua kali lebarnya, sedangkan tingginya dua kali lebarnya. Volume peti kemas tersebut 936 m^3 . Misalkan l adalah lebar peti kemas tersebut, informasi tersebut dapat dimodelkan sebagai berikut.

$$(2l + 1)l(2l) = 936$$

Selesaian persamaan tersebut adalah $l = 6$. Dengan demikian, panjang, lebar, dan tinggi peti kemas tersebut adalah 13 m, 6 m, dan 12 m. Luas permukaan peti kemas tersebut adalah $2(13 \times 6 + 13 \times 12 + 6 \times 12) = 612 \text{ m}^2$.

5. Latihan E Identitas Polinomial

1. Salah. Ada persamaan polinomial yang bukan merupakan identitas polinomial, misalnya $x^2 = 1$.
2. Benar. Identitas polinomial adalah persamaan polinomial yang selalu benar untuk semua kemungkinan nilai variabelnya.
3. $(p - q)(p^2 + pq + q^2)$
4. a. Persamaan yang diberikan bukan merupakan identitas polinomial karena ada $x = 0$ sedemikian sehingga $3(0 - 1)^2 = 3 \neq 9 = (3 \cdot 0 - 3)^2$.
b. Persamaan yang diberikan merupakan identitas polinomial. Pembuktiannya disajikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}(a - b + c)^2 &= (a - b + c)(a - b + c) \\&= a^2 - ab + ac - ab + b^2 - bc + ac - bc + c^2 \\&= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc \\&= a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab - ac + bc)\end{aligned}$$

5. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(x^2 + x - 6)(x - 4) &= (x + 3)(x - 2)(x - 4) \\&= (x + 3)(x^2 - 6x + 8) \\&= (x^2 - 6x + 8)(x + 3)\end{aligned}$$

Dengan demikian, agar $(x^2 + x - 6)(x - 4) = P(x) \cdot (x + 3)$ menjadi sebuah identitas, $P(x) = x^2 - 6x + 8$.

6. Pernyataan Togar benar. Misalkan x sembarang bilangan bulat, maka x dan $x + 1$ adalah dua bilangan yang berurutan. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $(x + 1)^2 - x^2 = x + (x + 1)$.

$$\begin{aligned}
 (x+1)^2 - x^2 &= x^2 + 2x + 1 - x^2 \\
 &= 2x + 1 \\
 &= x + (x+1)
 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa pernyataan Togar benar.

7. Misalkan a dan b adalah bilangan-bilangan real positif dengan $a > b$. Akan dibuktikan bahwa $a^2 - b^2$, $2ab$, dan $a^2 + b^2$ merupakan panjang sisi-sisi segitiga siku-siku. Dengan kata lain, ketiga bilangan tersebut memenuhi tripel Pythagoras.

$$\begin{aligned}
 (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 &= a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 \\
 &= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \\
 &= (a^2 + b^2)^2
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $a^2 - b^2$, $2ab$, dan $a^2 + b^2$ merupakan panjang sisi-sisi segitiga siku-siku.

8. a. $16(4 - 3x)^2 - 25 = 3(4x - 7)(12x - 11)$
 b. $m^4 + 6m^2n^2 + 9n^4 = (m^2 + 3n^2)^2$
9. Titik potongnya adalah $(-\sqrt{5}, 25 + 9\sqrt{5})$ dan $(\sqrt{5}, 25 - 9\sqrt{5})$.

6. Uji Kompetensi

- Salah
- Benar
- Benar
- $n + m$
- $P(-4)$
- Derajatnya secara berturut-turut adalah 4 dan 7.
- Perilaku ujungnya ke kiri atas dan ke kanan bawah ($\nearrow$, $\searrow$) sehingga grafik B yang paling sesuai.
- $2mn - 2m + 2n^2 - 2$
- $x^4 + x^3 - 3x^2 - 3 = (x+2)(x-2)(x^2 + x + 1) + 4x + 1$
- $P(9) = -1$

11. $(-\sqrt{5}, 0)$, $(-1, 0)$, dan $(\sqrt{5}, 0)$

12. Persamaan $49 - (2x + 7)^2 = -2x(14 + 2x)$ merupakan identitas polinomial karena

$$\begin{aligned} 49 - (2x + 7)^2 &= 7^2 - (2x + 7)^2 \\ &= [7 - (2x + 7)][7 + (2x + 7)] \\ &= -2x(14 + 2x). \end{aligned}$$

Persamaan $(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$ juga merupakan identitas polinomial karena

$$\begin{aligned} (m^2 + n^2)^2 &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2. \end{aligned}$$

13. $L = \pi x^2$

14. a. $L = 7.000 \text{ cm}^2$

b. $L(x) = 6x^2 - 420x + 7.000$

c. $x = 10 \text{ cm}$

15. a. $V(x) = 36x^2 - 2x^3$

b. $D = \{x \mid 0 < x < 18, x \in \mathbb{R}\}$

c. 1.728 cm^3

16. Rp115.762.500,00

17. a. $(25\sqrt{3} - 20) \text{ m}$ atau sekitar 23,3 m

b. $\frac{25}{8}(5\sqrt{3} + \sqrt{139}) \text{ m}$ atau sekitar 63,9 m

18. Dengan jendela tampilan kalkulator yang dipilih, Nyoman hanya akan melihat satu grafik, yaitu grafik $y = (2x + 3)(2x - 3)$. Akan tetapi, ketika dia memperluas jendela tampilannya (misalnya sumbu- x diatur mulai -5 sampai 5 dan sumbu- y mulai -10 sampai 20), dia akan melihat dua grafik yang berbeda.

19. Jika $\frac{p}{q}$ adalah pembuat nol rasional (dalam bentuk paling sederhana) dari polinomial $P(x)$, maka

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

$$p (a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$$

Karena p adalah faktor dari bentuk ruas kiri, berarti p juga menjadi faktor dari bentuk ruas kanan. Karena p/q merupakan bentuk paling sederhana, maka p dan q tidak memiliki faktor persekutuan, sehingga p faktor dari a_0 . Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa q merupakan faktor dari a_n .

7. Proyek: Strategi Menang Lelang

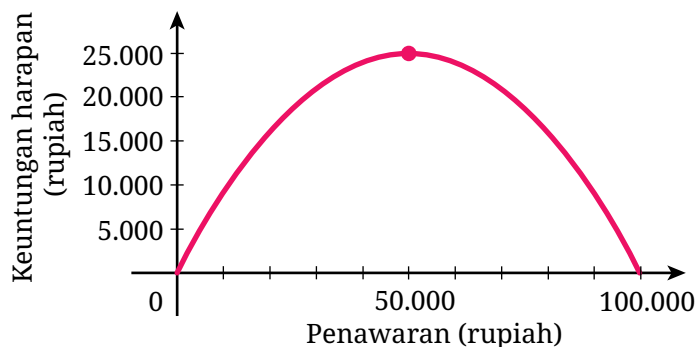
- Berikut ini tabel penawaran dan keuntungan yang bersesuaian.

Penawaran	10.000	20.000	40.000	80.000	p
Keuntungan	90.000	80.000	60.000	20.000	$100.000 - p$

- Peluangnya adalah sekitar $\frac{20.000}{100.000} = 0,2$.
- Peluangnya adalah $\frac{p}{100.000}$.
- a. Keuntungan harapannya sama dengan peluang menang dikalikan keuntungannya. Jika penawaran yang diberikan adalah p , keuntungan harapannya dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\frac{p}{100.000} \cdot (100.000 - p) = p - \frac{p^2}{100.000}$$

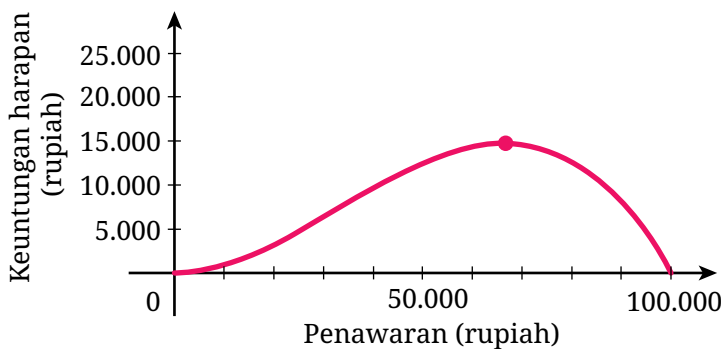
Grafik keuntungan harapan terhadap penawarannya ditunjukkan seperti berikut.



- b. Dengan menggunakan rumus nilai maksimum untuk fungsi kuadrat, keuntungan harapan maksimumnya adalah Rp25.000,00.
5. a. Penambahan orang tidak akan memengaruhi keuntungan yang diperoleh.
- b. Jika penawarannya p , keuntungannya tetap $100.000 - p$. Akan tetapi, penambahan orang tersebut akan memengaruhi peluang menangnya. Dengan penawaran p , peluang untuk mengalahkan teman pertama adalah $\frac{p}{100.000}$ dan peluang untuk mengalahkan teman kedua adalah $\frac{p}{100.000}$. Dengan demikian, peluang untuk mengalahkan teman pertama dan teman kedua adalah $\frac{p}{100.000} \cdot \frac{p}{100.000} = \left(\frac{p}{100.000}\right)^2$. Akibatnya, keuntungan harapannya dapat dimodelkan dengan rumus berikut.

$$\left(\frac{p}{100.000}\right)^2 \cdot (100.000 - p) = \frac{p^2}{100.000} - \frac{p^3}{10.000.000.000}$$

Grafik keuntungan harapan terhadap penawarannya sekarang menjadi seperti berikut.

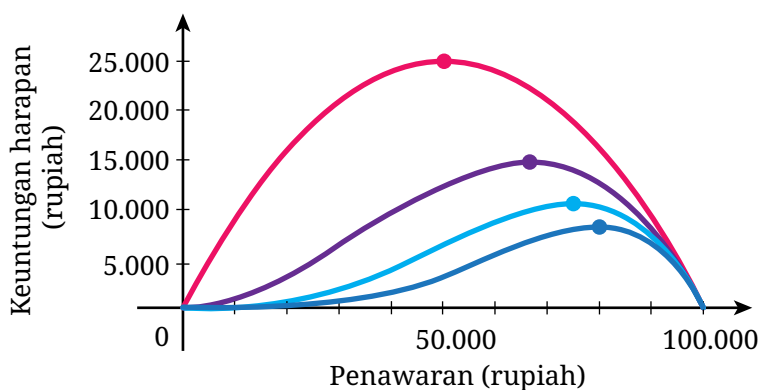


- c. Dengan menggunakan bantuan kalkulator grafik, keuntungan harapan maksimumnya adalah Rp14.814,80.

6. Jika peserta lelang ada n orang, untuk penawaran sebesar p rupiah, keuntungan harapannya dapat dimodelkan sebagai berikut.

$$\left(\frac{p}{100.000}\right)^{n-1} (100.000 - p)$$

Semakin banyak peserta lelangnya, semakin kecil keuntungan harapan maksimumnya. Hal ini dapat diilustrasikan oleh grafik berikut ini.



I. Refleksi

Buku Siswa telah memuat fitur Refleksi. Gunakan fitur tersebut untuk mengajak peserta didik melakukan refleksi pada setiap akhir pembelajaran bab. Bapak/Ibu Guru juga dapat menyalin fitur tersebut untuk diisi oleh peserta didik dan dikumpulkan kembali ke Bapak/Ibu. Dengan cara seperti ini, Bapak/Ibu dapat menganalisis refleksi peserta didik dan menggunakannya untuk memperbaiki praktik pembelajaran berikutnya.

Bapak/Ibu juga perlu melakukan refleksi terhadap pembelajaran yang telah dilakukan. Terdapat banyak cara melakukannya. Salah satunya ialah dengan mengikuti panduan refleksi berikut.

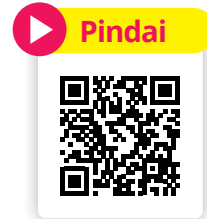
Tabel 2.2 Panduan Refleksi Pembelajaran Polinomial

No.	Panduan Refleksi
1.	Deskripsikan pengalaman Bapak/Ibu Guru dalam mengajarkan Polinomial.
2.	Deskripsikan perasaan dominan Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Polinomial.
3.	Evaluasilah pengalaman Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Polinomial.
4.	Apa saja pelajaran berharga yang telah dipetik Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Polinomial?
5.	Berdasarkan hasil refleksi pelaksanaan pembelajaran Polinomial, buatlah rencana tindak lanjut sebagai perbaikan pembelajaran Polinomial yang akan datang.

J. Sumber Belajar

Sumber belajar utama bagi peserta didik adalah Buku Siswa. Selain itu, Bapak/Ibu Guru juga dapat memilihkan sumber-sumber belajar lain yang relevan dengan tujuan pembelajaran dalam bab “Polinomial” ini. Beberapa sumber belajar tersebut adalah sebagai berikut.

Sumber belajar ini menjelaskan bagaimana melakukan pembagian polinomial dengan metode Horner.



<https://s.id/polinom-horner>

Sumber belajar ini membahas beberapa cara untuk memfaktorkan polinomial. Cara yang dibahas adalah dengan menggunakan faktor persekutuan, pengelompokan, dan identitas-identitas polinomial.



<https://s.id/faktorisasi-polinom>

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2024

Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut (Edisi Revisi)
untuk SMA Kelas XI

Penulis: Yosep Dwi Kristanto, Muhammad Taqiyuddin, Al Azhary Masta, Elyda Yulfiana
ISBN: 978-623-388-339-9

Panduan Khusus

Bab 3 FUNGSI

TRIGONOMETRI



Sumber: NASA JSC ISS image library/Wikimedia Commons/CC0 (2021)

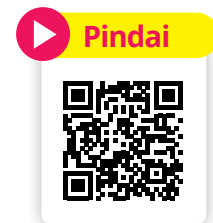
A. Pendahuluan

1. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari Fungsi Trigonometri, peserta didik diharapkan mampu:

- menentukan nilai fungsi trigonometri untuk sembarang bilangan real;
- mensketsa grafik fungsi trigonometri menggunakan transformasi fungsi;
- menginterpretasi grafik fungsi trigonometri menggunakan transformasi fungsi;
- menggunakan identitas-identitas trigonometri dasar untuk membuktikan identitas-identitas trigonometri lainnya; dan
- menyelesaikan permasalahan menggunakan Aturan Sinus dan Aturan Kosinus.

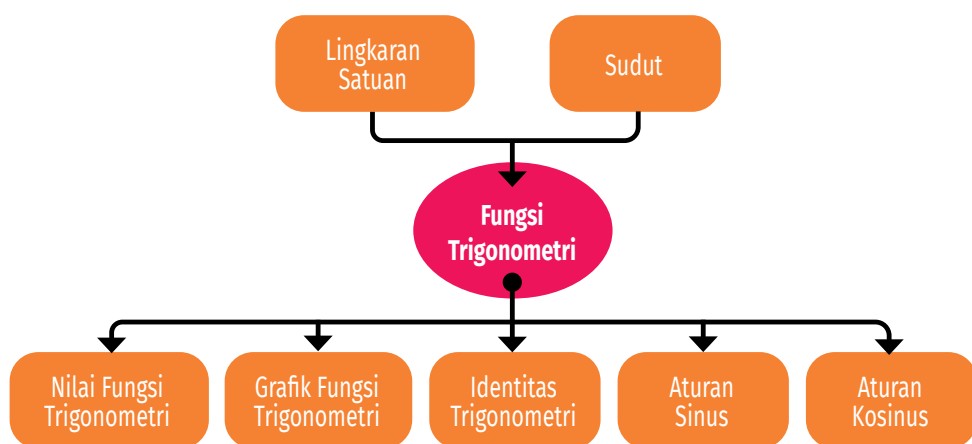
Tujuan-tujuan pembelajaran tersebut merupakan tujuan umum setiap subbabnya. Tujuan pembelajaran yang lebih detail dapat ditemukan pada setiap aktivitas dalam setiap subbab. Apabila Bapak/Ibu Guru ingin mengetahui penjelasan dan justifikasi terhadap alur tujuan pembelajaran dalam aktivitas-aktivitas tersebut, silakan mengunjungi <https://s.id/atp-fungsi-trig> atau memindai kode respons cepat di samping.



Bapak/Ibu Guru dapat menentukan kriteria ketercapaian tujuan pembelajaran (KKTP) Bab 3 dengan mengacu pada kolom Tujuan Pembelajaran dalam **Tabel 3** Pemetaan Capaian Pembelajaran dan Tujuan Pembelajaran pada bagian “Panduan Umum”.

2. Peta Materi

Berikut ini peta materi pembelajaran fungsi trigonometri pada Bab 3 Buku Siswa.



Gambar 3.1 Peta Materi Bab 3 Buku Siswa

3. Saran Durasi Pembelajaran

Bapak/Ibu Guru dapat melakukan pembelajaran bab “Fungsi Trigonometri” ini selama 35 jam pelajaran (JP) dengan 1 JP = 45 menit. Meskipun demikian, Bapak/Ibu dapat mengaturnya sesuai dengan kebutuhan peserta didik dan kondisi sekolah masing-masing.

B. Materi Prasyarat

Pembelajaran Fungsi Trigonometri untuk kelas XI tingkat lanjut ini tidak terlepas dari pengalaman belajar dan kemampuan awal peserta didik. Subbab A dibangun oleh pengetahuan dan kemampuan peserta didik tentang materi ukuran sudut dalam derajat, lingkaran, dan perbandingan trigonometri untuk segitiga siku-siku. Prasyarat subbab B adalah materi fungsi dan grafiknya, serta transformasi fungsi. Subbab C dibangun oleh materi tentang persamaan dan identitas matematika, serta sifat-sifat pada operasi aljabar dan persamaan. Terakhir, prasyarat subbab D dan E adalah materi tentang segitiga dan teorema Pythagoras (atau rumus jarak pada bidang koordinat).

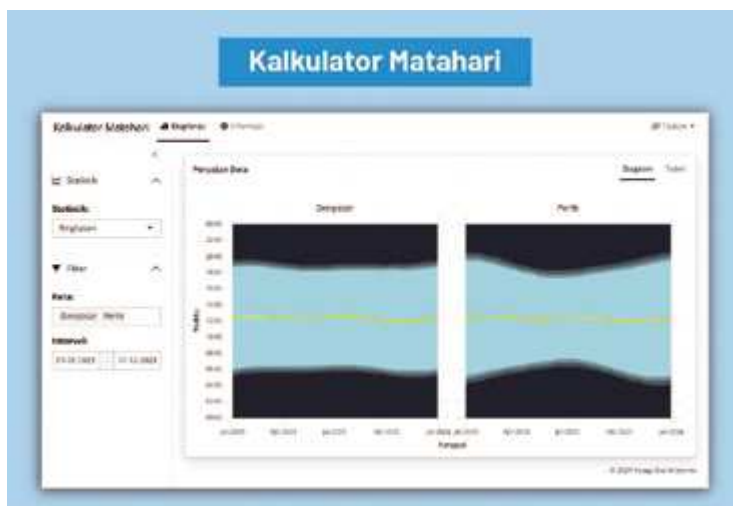
C. Apersepsi

Bapak/Ibu Guru dapat mengawali pembelajaran Fungsi Trigonometri dengan menunjukkan fakta-fakta menarik tentang penggunaan fungsi tersebut. Misalnya, Bapak/Ibu dapat meminta peserta didik mengamati

sampul bab ini di Buku Siswa, kemudian menyampaikan pertanyaan pemantiknya, “Pada Maret 2021 kapal Ever Given tersangkut di Terusan Suez. Bagaimana fungsi trigonometri dapat digunakan untuk memodelkan fenomena alam yang turut membantu penyelamatan kapal tersebut?”

Jelaskan bahwa mereka dapat menggunakan fungsi trigonometri untuk memodelkan fenomena pasang surut air laut, sebuah fenomena yang turut membantu penyelamatan kapal Ever Given yang tersangkut di Terusan Suez. Informasikan kepada peserta didik bahwa pembahasannya secara lebih lanjut dapat mereka temukan pada akhir Subbab B.

Selain itu, Bapak/Ibu Guru juga dapat bercerita tentang perbedaan durasi waktu sehari, yaitu periode dari matahari terbit sampai terbenam. Gunakan deskripsi pada bagian pengantar bab, yaitu “Memahami Dunia di Sekitar Kita”, untuk membangun cerita tersebut. Bapak/Ibu Guru juga dapat mendemonstrasikan perbedaan durasi waktu sehari antara satu tempat dengan tempat lainnya dengan menggunakan media pembelajaran Kalkulator Matahari (<https://s.id/kalk-matahari>) yang ditunjukkan pada Gambar 3.2 berikut.



Gambar 3.2 Tampilan Media Pembelajaran Kalkulator Matahari

Media pembelajaran tersebut cukup didemonstrasikan saja secara klasikal karena peserta didik nantinya berkesempatan menggunakannya secara langsung melalui kegiatan Proyek (pada bagian akhir bab).

D. Penilaian sebelum Pembelajaran

Bapak/Ibu Guru dapat melakukan penilaian awal agar pembelajaran topik fungsi trigonometri ini sesuai dengan kebutuhan dan konteks peserta didik. Oleh karena itu, Bapak/Ibu Guru dapat mendesain tes yang bertujuan mengetahui kemampuan prasyarat peserta didik dan kemampuan awal mereka terhadap topik fungsi trigonometri.

Desainlah tes yang cukup mudah dan cepat untuk dianalisis, tetapi juga memberikan informasi yang kaya tentang kemampuan awal peserta didik, misalnya tes berbentuk pilihan ganda atau pilihan ganda kompleks. Gunakan daftar kemampuan prasyarat pada bagian B dan tujuan pembelajaran pada bagian A untuk mengembangkan butir-butir tes tersebut.

E. Panduan Pembelajaran Buku Siswa

Subbab A: Fungsi Trigonometri dan Lingkaran Satuan

Aktivitas 1

Mengonversi Ukuran Sudut

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat mengonversi ukuran sudut dari radian ke derajat, dan sebaliknya.

Bapak/Ibu Guru, Aktivitas 1 ini secara umum terkait dengan sudut dan ukurannya. Jelaskan pengertian sudut sebagai perputaran sinar garis (hal ini sedikit berbeda dengan pengertian sudut dalam kajian geometri) sehingga dikenal sudut positif dan sudut negatif. Sebagai penunjang, deskripsikan dan berikan contoh yang menjelaskan makna satu putaran. Jelaskan juga tentang sudut-sudut dalam posisi baku. Selanjutnya, Bapak/Ibu Guru juga perlu menjelaskan satuan sudut yang baru, yaitu radian. Dalam menjelaskan satuan ini, mintalah peserta didik untuk mencermati Definisi 3.1.

Setelah itu, gunakan Contoh 3.1 untuk mendemonstrasikan bagaimana mengukur sebuah sudut dengan satuan radian. Setelah

peserta didik memahaminya, mintalah mereka untuk mengerjakan Mari Mencoba 3.1 secara mandiri. Selanjutnya, pilihlah satu atau beberapa peserta didik untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Alternatif penyelesaian Mari Mencoba tersebut adalah sebagai berikut.



Mari Mencoba 3.1

Besar sudut α dan β dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\alpha = \frac{15\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\beta = -\frac{10\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

Lanjutkan kegiatan pembelajaran dengan membagi peserta didik menjadi beberapa kelompok. Mintalah mereka untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Menentukan Hubungan antara Derajat dan Radian.

Setelah peserta didik menyelesaikan eksplorasi tersebut, mintalah beberapa kelompok mengomunikasikan hasil pekerjaannya untuk dibahas secara klasikal. Alternatif penyelesaian kegiatan eksplorasi tersebut adalah sebagai berikut.



Eksplorasi

Menentukan Hubungan antara Derajat dan Radian

1. Besar keempat sudut sebagai berikut:

kiri atas: 144° atau $\frac{4\pi}{5} \text{ rad}$;

kanan atas: -120° atau $-\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$;

kiri bawah: 180° atau $\pi \text{ rad}$;

kanan bawah: $229,2^\circ$ (pembulatan) atau 4 rad .

2. Berikut ini tabel yang sudah lengkap.

Tabel 3.1 Besar Sudut dalam Derajat dan Radian

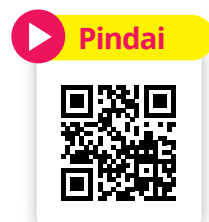
No.	Besar Sudut (dalam Derajat)	Besar Sudut (dalam Radian)
1.	45°	$\frac{\pi}{4}$
2.	-120°	$-\frac{2\pi}{3}$
3.	360°	2π
4.	180°	π
5.	$-\left(\frac{540}{\pi}\right)^\circ$	-3

3. Untuk mengonversi ukuran sudut dari derajat ke radian, kalikan dengan $\frac{\pi}{180}$. Sebaliknya, untuk mengonversi ukuran sudut dari radian ke derajat, kalikan dengan $\frac{180^\circ}{\pi}$.

Kegiatan eksplorasi tersebut juga dapat diganti dengan pembelajaran interaktif yang memanfaatkan media pembelajaran digital. Untuk itu, Bapak/Ibu Guru dapat mempertimbangkan Alternatif Pembelajaran berikut untuk menggantikan pengerjaan kegiatan eksplorasi sebelumnya.

Alternatif Pembelajaran

Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan media pembelajaran digital “Hubungan Antara Derajat dan Radian” sebagai alternatif kegiatan Eksplorasi: Menentukan Hubungan antara Derajat dan Radian. Media ini dapat diakses melalui tautan <https://s.id/derajat-rad> atau dengan memindai kode respons cepat di samping. Sebagai catatan, media tersebut memerlukan waktu sekitar 3–4 menit ketika pertama kali dibuka. Selain itu, media tersebut sebaiknya dibuka menggunakan gawai berlayar lebar (komputer atau laptop).



Setelah semua peserta didik berhasil membuka media pembelajaran tersebut, mintalah mereka untuk mengerjakan perintah dan pertanyaan yang terdapat di dalam Aktivitas Interaktif Buku Siswa.

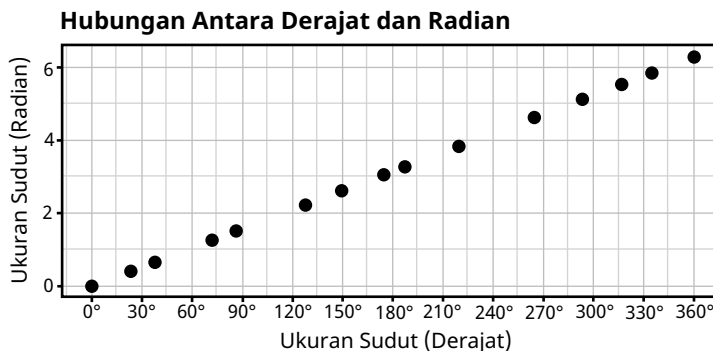
1. Berapakah besar sudut (dalam derajat dan radian) 0,25 putaran dan 0,6 putaran?

Pertanyaan tersebut dapat dijawab dengan menggunakan media pembelajaran dan diperoleh hasil berikut.

Putaran	Derajat	Radian
0,25	90,00	1,57
0,6	216,00	3,77

2. Buatlah beberapa putaran dan simpanlah besaran sudutnya dalam derajat dan radian. Lihat grafik dan tabelnya, kemudian tentukan hubungan antara derajat dan radian!

Misalnya data yang dimiliki oleh peserta didik ditunjukkan pada Gambar 3.3 berikut.



Gambar 3.3 Contoh Data yang Dikumpulkan Peserta Didik

Peserta didik juga dapat mengakses tabel dari data yang ditunjukkan pada Gambar 3.3 tersebut.

Setelah melihat datanya, peserta didik diharapkan dapat menemukan pola linear. Jika peserta didik mengalami kesulitan dalam menemukan polanya, mintalah mereka untuk

menampilkan modelnya dengan mencentang “Tampilkan model” pada bilah sisi. Karena polanya linear, peserta didik dapat menggunakan rumus berikut untuk menentukan hubungan antara derajat dan radian.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Melalui kegiatan pembelajaran sebelumnya, peserta didik diharapkan menemukan hubungan antara ukuran sudut derajat dan radian. Ajaklah mereka untuk membandingkan temuannya dengan Sifat 3.1. Selanjutnya, gunakan Contoh 3.2 untuk menunjukkan bagaimana mengonversi ukuran sudut, baik dari derajat ke radian maupun sebaliknya.

Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 3.2 secara mandiri, kemudian undanglah beberapa dari mereka untuk menjelaskan hasil pekerjaannya. Berikut ini alternatif penyelesaian Mari Mencoba tersebut.



Mari Mencoba 3.2

$$75^\circ = 75 \left(\frac{\pi}{180} \right) \text{ rad} = \frac{5\pi}{12} \text{ rad}$$

$$6 \text{ rad} = 6 \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) \approx 343,78^\circ$$

Di akhir, jelaskan tentang kesepakatan dalam penulisan satuan ukuran sudut. Ketika ukuran suatu sudut ditulis menggunakan satuan derajat ($^\circ$), sudut tersebut memiliki satuan derajat. Jika ukurannya tidak bersatuan, sudut tersebut memiliki satuan radian.

Aktivitas 2

Menentukan Nilai Fungsi Trigonometri

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menggunakan definisi fungsi trigonometri untuk menentukan nilai fungsi trigonometri.

Bapak/Ibu Guru, mintalah peserta didik untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Menentukan Koordinat Titik pada Lingkaran Satuan secara berkelompok, kemudian pilihlah satu atau beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasilnya. Alternatif penyelesaian kegiatan eksplorasi tersebut adalah sebagai berikut.



Eksplorasi

Menentukan Koordinat Titik pada Lingkaran Satuan

1. $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2. Koordinat x titik tersebut sama dengan nilai kosinus sudutnya, sedangkan koordinat y-nya sama dengan nilai sinus sudutnya.

Melalui kegiatan eksplorasi tersebut, peserta didik diharapkan dapat menyimpulkan bahwa koordinat titik pada lingkaran satuan dapat ditentukan menggunakan perbandingan-perbandingan trigonometri.

Antisipasi Miskonsepsi

Ketika menentukan koordinat titik pada lingkaran satuan, kemungkinan banyak peserta didik yang tidak mempertimbangkan tanda positif atau negatifnya. Oleh karena itu, penting bagi Bapak/Ibu Guru untuk mengingatkan peserta didik tentang tanda absis dan ordinat titik di setiap kuadran. Di kuadran I, absis dan ordinatnya sama-sama positif. Di kuadran II, absisnya negatif sedangkan ordinatnya positif. Di kuadran III, keduanya negatif. Terakhir, di kuadran IV, absisnya positif sedangkan ordinatnya negatif.

Gunakan hal tersebut sebagai awalan untuk mendefinisikan fungsi-fungsi trigonometri untuk sembarang bilangan real, seperti yang dirangkum dalam Definisi 3.2 (dalam Buku Siswa).

Selanjutnya, gunakan Contoh 3.3 untuk mendemonstrasikan bagaimana menerapkan Definisi 3.2 untuk menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri. Setelah peserta didik memahaminya, mintalah mereka untuk mengerjakan Mari Mencoba 3.3, kemudian pilihlah

beberapa dari mereka untuk mempresentasikan hasilnya. Alternatif penyelesaian untuk Mari Mencoba tersebut adalah sebagai berikut.



Mari Mencoba 3.3

$$\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos t = -\frac{1}{2} \quad \tan t = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

Definisi 3.2 dapat digunakan untuk menentukan sudut-sudut kuadran, yaitu sudut-sudut dalam posisi baku yang sisi akhirnya berimpit dengan sumbu- x atau sumbu- y . Gunakan Contoh 3.4 untuk mendemonstrasikannya. Setelah itu, ajaklah peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 3.4 dan membagikan hasilnya. Alternatif penyelesaiannya adalah sebagai berikut.



Mari Mencoba 3.4

Sebuah sinar garis yang diputar dari sumbu- x positif sejauh π memotong lingkaran satuan di $(-1, 0)$. Dengan demikian,

$$\sin \pi = 0 \quad \cos \pi = -1 \quad \tan \pi = \frac{0}{-1} = 0$$

Aktivitas 3

Menentukan Nilai Fungsi Trigonometri dengan Bilangan Acuan

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menentukan nilai fungsi trigonometri menggunakan bilangan acuan.

Bapak/Ibu Guru, mulailah Aktivitas 3 ini dengan penjelasan tanda (positif atau negatif) nilai fungsi-fungsi trigonometri di kuadran I, kuadran II, kuadran III, dan kuadran IV. Untuk melakukannya, Bapak/Ibu dapat menggunakan Gambar 3.14 (dalam Buku Siswa).

Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Menentukan Nilai Fungsi Trigonometri secara berkelompok, kemudian pilihlah satu atau beberapa kelompok untuk mengomunikasikan hasil pekerjaannya. Alternatif penyelesaian kegiatan eksplorasi tersebut adalah sebagai berikut.



Eksplorasi

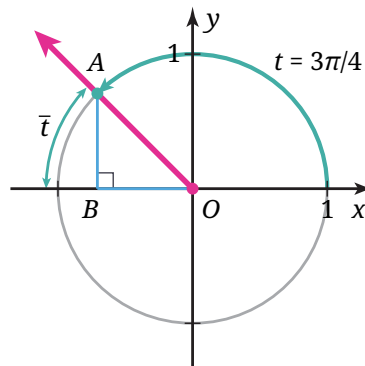
Menentukan Nilai Fungsi Trigonometri

1. Titik $(-4, -3)$ berada pada kuadran ketiga. Titik $(3, 0)$ dan titik $(0, -2)$ tidak berada pada kuadran mana pun.
2. Berikut ini isian tabel yang diberikan.

Tabel 3.2 Nilai Sinus, Kosinus, dan Tangen untuk Beberapa Nilai t

t	$\sin t$	$\cos t$	$\tan t$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	1	0	Tak terdefinisi
π	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	Tak terdefinisi

3. Berikut ini langkah-langkah penentuan nilai $\sin t$, $\cos t$, dan $\tan t$ jika $t = \frac{3\pi}{4}$.
 - a. Berikut adalah sudut $t = \frac{3\pi}{4}$ yang diberikan dalam Buku Siswa.



Gambar 3.4 Sudut $t = \frac{3\pi}{4}$ dalam Posisi Baku

- b. $\bar{t} = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$
- c. $A\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- d. $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan t = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$
- e. Untuk sinus, nilai keduanya sama. Untuk kosinus dan tangen, nilai keduanya berlawanan tanda.
4. $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
 $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$
5. $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 $\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \tan\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$
6. $\sin\left(\frac{21\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(\frac{21\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan\left(\frac{21\pi}{4}\right) = 1$
 $\sin\left(-\frac{37\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \cos\left(-\frac{37\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan\left(-\frac{37\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
7. Cara menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri untuk sembarang bilangan real t dimulai dengan mengidentifikasi posisi sudutnya di kuadran mana dan $\bar{t}$. Nilai fungsi trigonometri untuk t sama dengan nilai fungsi trigonometri untuk $\bar{t}$, kecuali mungkin tandanya (positif atau negatifnya). Tanda ini bergantung pada posisi sudut tersebut berada pada kuadran mana.

Ajaklah peserta didik untuk merangkum temuan mereka dalam penentuan nilai fungsi-fungsi trigonometri. Fokuskan rangkuman tersebut pada penggunaan bilangan acuan $\bar{t}$ dalam penentuan nilai fungsi-fungsi trigonometri untuk bilangan atau sudut t . Gunakan Gambar 3.17 (dalam Buku Siswa) untuk menyintesis bagaimana menentukan bilangan acuan tersebut pada sembarang kuadran.

Gunakan Contoh 3.5 untuk menunjukkan bagaimana menentukan bilangan acuan jika diberikan sembarang sudut t . Setelah itu, mintalah

peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 3.5, kemudian membandingkan hasil pekerjaannya dengan hasil pekerjaan teman-temannya. Alternatif penyelesaian Mari Mencoba tersebut adalah sebagai berikut.



Mari Mencoba 3.5

Bilangan acuan untuk $t = \frac{\pi}{3}$ adalah $\bar{t} = t = \frac{\pi}{3}$. Bilangan acuan untuk $t = \frac{2\pi}{3}$ adalah $\bar{t} = \pi - t = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

Penentuan bilangan acuan penting dalam menghitung nilai fungsi-fungsi trigonometri. Gunakan Contoh 3.6 untuk mendemonstrasikan bagaimana menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri dengan memanfaatkan bilangan acuan. Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 3.6 dan membandingkan hasil pekerjaannya dengan hasil pekerjaan teman-temannya.



Mari Mencoba 3.6

Sudut $t = \frac{7\pi}{4}$ berada pada kuadran IV sehingga bilangan acuannya $\bar{t} = 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Dengan demikian,

$$\sin \frac{7\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dengan cara yang serupa, kita memperoleh

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bapak/Ibu Guru selanjutnya perlu menyintesis pembelajaran yang telah dilakukan oleh peserta didik tentang strategi untuk menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri menggunakan bilangan acuan. Hal ini telah dijelaskan juga dalam Buku Siswa.

Antisipasi Miskonsepsi

Beberapa peserta didik mungkin masih mengalami kekeliruan ketika mengerjakan soal-soal dalam bagian Mari Mencoba 3.6. Misalnya, peserta didik mungkin akan mengalami kesalahan

dalam memberikan tanda positif atau negatif pada nilai fungsi trigonometri. Oleh karena itu, Bapak/Ibu Guru perlu mengingatkan peserta didik untuk selalu menganalisis posisi sudut yang diberikan terletak di kuadran mana.

Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mencermati Contoh 3.7, kemudian mengerjakan Mari Mencoba 3.7. Pilihlah satu atau beberapa peserta didik untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Berikut ini alternatif penyelesaian untuk Mari Mencoba tersebut.



Mari Mencoba 3.7

Karena sudut $t = \frac{7\pi}{6}$ berada pada kuadran III, bilangan acuannya adalah $\bar{t} = \frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{6}$. Dengan demikian,

$$\sec \frac{7\pi}{6} = -\sec \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc \frac{7\pi}{6} = -\csc \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$\cot \frac{7\pi}{6} = \cot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$$

Aktivitas 4

Menggunakan Sifat Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Tujuan Pembelajaran

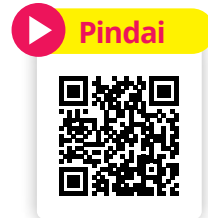
Peserta didik dapat menentukan nilai fungsi trigonometri menggunakan sifat fungsi genap dan fungsi ganjil.

Bapak/Ibu Guru, mulailah Aktivitas 4 dengan penjelasan fungsi genap dan fungsi ganjil. Pengertiannya telah dijelaskan dalam Buku Siswa. Setelah itu, jelaskan sifat fungsi genap dan fungsi ganjil untuk fungsi-fungsi trigonometri menggunakan Sifat 3.2.

Dalam memberikan penjelasan sifat fungsi genap dan fungsi ganjil tersebut, Bapak/Ibu juga dapat menggunakan Alternatif Pembelajaran berikut ini.

Alternatif Pembelajaran

Dalam mendiskusikan Sifat 3.2, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan media pembelajaran digital yang telah disediakan. Media pembelajaran tersebut dapat diakses melalui tautan <https://s.id/trig-genap-ganjil> atau dengan memindai kode respons cepat di samping.



Gunakan panduan berikut untuk memfasilitasi pembelajaran peserta didik.

1. Ubahlah besar sudutnya dengan menggeser slider t_0 dan amati apa yang terjadi pada bidang grafik.
2. Amati nilai $\sin(t_0)$ dan $\sin(-t_0)$, $\cos(t_0)$ dan $\cos(-t_0)$, serta $\tan(t_0)$ dan $\tan(-t_0)$.
3. Buatlah kesimpulan berdasarkan pengamatanmu!

Bapak/Ibu Guru dapat menghubungkan simpulan peserta didik pada nomor 3 tersebut dengan Sifat 3.2 pada Buku Siswa.

Selanjutnya, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan Contoh 3.8 untuk mendemonstrasikan bagaimana menerapkan Sifat 3.2 untuk menentukan nilai fungsi-fungsi trigonometri.

Setelah peserta didik memahaminya, mintalah mereka untuk mengerjakan Mari Mencoba 3.8 dan mendiskusikan hasil pekerjaannya dengan teman-temannya.



Mari Mencoba 3.8

Dengan menggunakan Sifat 3.2, kita mendapatkan

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

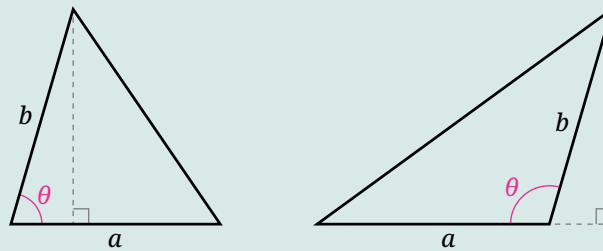
$$\csc\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\csc\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Pada akhir Aktivitas 4, mintalah peserta didik untuk mengerjakan kolom Mari Berpikir Kreatif secara berpasangan. Setelah itu, pilihlah satu atau beberapa pasang peserta didik untuk mempresentasikan hasil pekerjaan mereka. Berikut ini alternatif penyelesaiannya.



Mari Berpikir Kreatif

Diberikan sembarang segitiga yang ditunjukkan pada Gambar 3.5 berikut.



Gambar 3.5 Segitiga dengan Sudut Dalam θ dan Panjang Sisi-Sisinya a dan b

Dengan menggunakan $\sin \theta$, tinggi h segitiga tersebut dapat ditentukan seperti berikut.

$$\sin \theta = \frac{h}{b}$$

$$h = b \sin \theta$$

Karena luas segitiga tersebut adalah $L = \frac{1}{2} ah$, maka

$$L = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$

Subbab B: Grafik Fungsi Trigonometri

Aktivitas 5

Mengidentifikasi Hubungan antara Jarak Tempuh dan Ketinggian

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat mengidentifikasi hubungan antara besaran dua kuantitas pada situasi yang dinamis.

Bapak/Ibu Guru, awalilah kegiatan pembelajaran pada Aktivitas 5 dengan bercerita tentang pentingnya grafik fungsi trigonometri. Misalnya, Bapak/Ibu dapat menggunakan pengantar Subbab B tentang kegunaan grafik fungsi trigonometri untuk memodelkan fenomena pasang surut air laut.

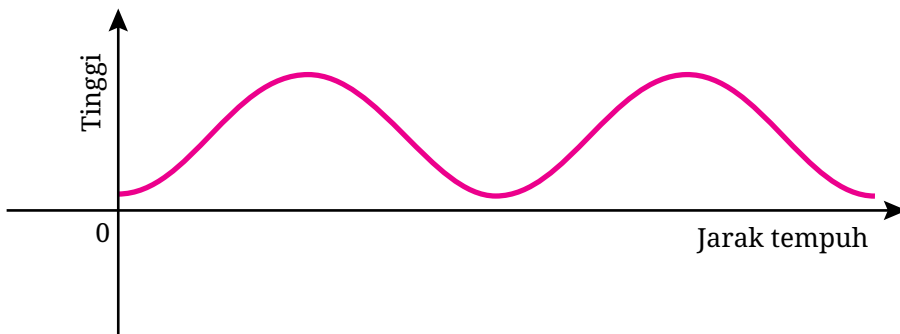
Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Menentukan Hubungan antara Jarak Tempuh dan Ketinggian secara berkelompok. Setelah mereka menyelesaikannya, mintalah beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya di depan kelas. Alternatif penyelesaian kegiatan eksplorasi tersebut adalah sebagai berikut.



Eksplorasi

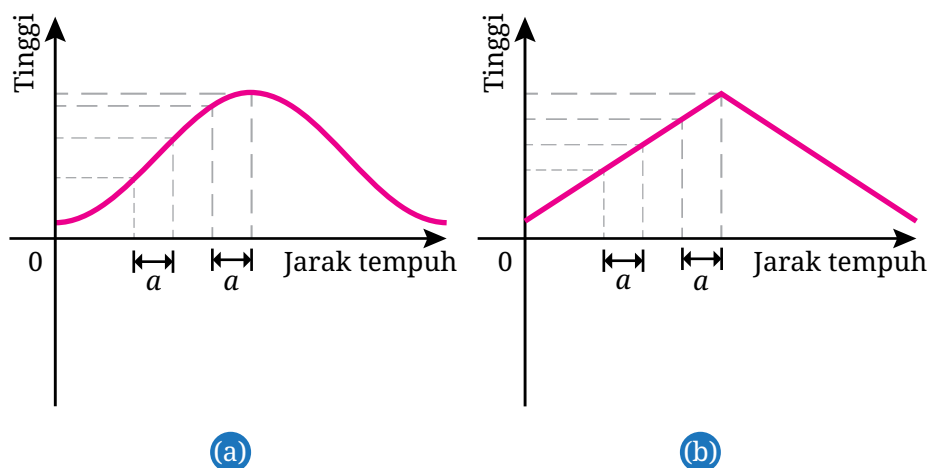
Menentukan Hubungan antara Jarak Tempuh dan Ketinggian

Hubungan antara jarak tempuh dan ketinggian Sondang selama bergerak di kincir ria kurang lebih ditunjukkan pada Gambar 3.6 berikut.



Gambar 3.6 Hubungan antara Jarak Tempuh dan Ketinggian Sondang

Gunakan pekerjaan peserta didik yang presentasi untuk membahas grafik jarak tempuh terhadap ketinggian Sondang selama di kincir ria. Untuk melakukannya, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan pertanyaan yang dapat memantik pemikiran matematis peserta didik. Misalnya, Bapak/Ibu dapat menggunakan Gambar 3.7 berikut.



Gambar 3.7 Dua Kemungkinan Grafik Hubungan Jarak Tempuh dengan Ketinggian

Berdasarkan Gambar 3.7 tersebut, Bapak/Ibu Guru dapat mengajukan pertanyaan berikut untuk didiskusikan secara klasikal.

Mengapa grafik (a) lebih tepat merepresentasikan hubungan antara jarak tempuh dan ketinggian Sondang selama dia di kincir ria?

Kegiatan pembelajaran dalam Aktivitas 5 dapat diganti dengan pembelajaran yang menggunakan media pembelajaran digital. Untuk melakukannya, silakan Bapak/Ibu cermati kolom Alternatif Pembelajaran berikut.

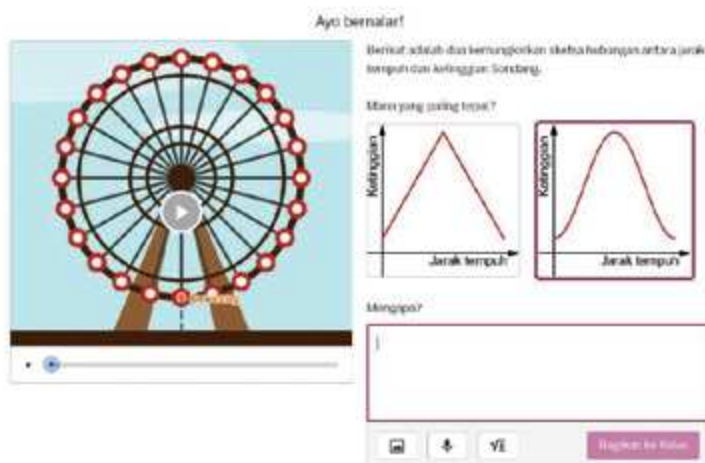
Alternatif Pembelajaran

Bapak/Ibu Guru dapat memanfaatkan media pembelajaran digital sebagai pengganti Aktivitas 5 sebelumnya. Media pembelajaran tersebut berjudul “Sukaria Bermain Kincir Ria” dan dapat diakses melalui tautan <https://s.id/trig-kincir> atau dengan memindai kode respons di samping.



Tujuan pembelajaran dalam media tersebut sama dengan Aktivitas 5. Akan tetapi, melalui media tersebut peserta didik dapat berinteraksi dengan kincir ria, mengamati animasi pergerakan Sondang selama berada di dalam kincir ria tersebut, dan mensketsa

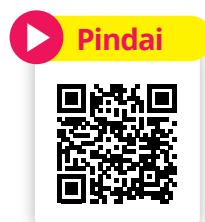
hubungan jarak tempuh dan ketinggiannya. Di akhir, peserta didik juga dituntut untuk bernalar tentang bentuk grafik yang paling tepat untuk merepresentasikan hubungan tersebut. Perhatikan Gambar 3.8 berikut.



Gambar 3.8 Tampilan Media Pembelajaran

Jika Bapak/Ibu Guru memerlukan panduan untuk mengelola kelas menggunakan media pembelajaran tersebut, silakan menonton tutorialnya melalui tautan berikut.

<https://youtu.be/CDKQh011k64>



Aktivitas 6

Menganalisis Grafik Fungsi Sinus dan Fungsi Kosinus serta Transformasinya

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menganalisis grafik fungsi sinus dan fungsi kosinus, serta transformasi kedua fungsi trigonometri tersebut.

Bapak/Ibu Guru, awali Aktivitas 6 ini dengan pembahasan terkait periode fungsi $y = \sin t$ dan $y = \cos t$, seperti pada awal sub-subbab Grafik Fungsi Sinus dan Fungsi Kosinus serta Transformasinya. Pembahasan ini menjadi dasar bagi kegiatan pembelajaran selanjutnya.

Setelah itu, mintalah peserta didik berkelompok untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Menggambar Grafik $y = \sin t$ dan $y = \cos t$ dengan Plot Titik. Pilihlah satu atau beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasilnya.



Eksplorasi

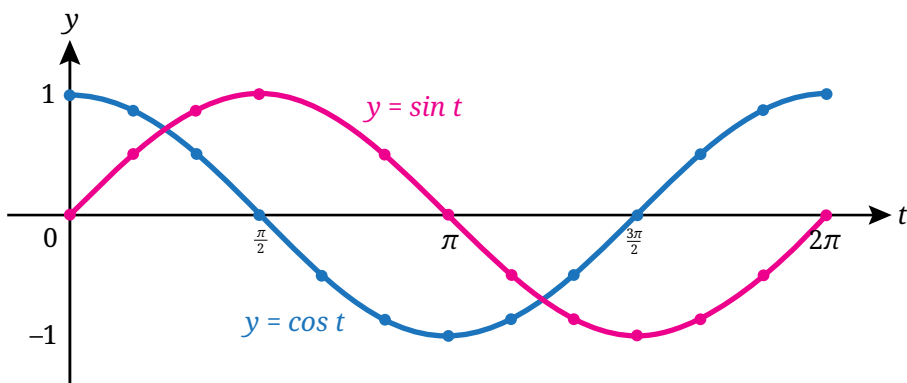
Menggambar Grafik $y = \sin t$ dan $y = \cos t$ dengan Plot Titik

- Berikut ini tabel nilai fungsi $y = \sin t$ dan $\cos t$ dalam satu periodenya.

Tabel 3.3 Nilai Sinus dan Kosinus untuk Beberapa Nilai t

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

- Sketsa grafik fungsi $y = \sin t$ dan $y = \cos t$ dalam satu periodenya ditunjukkan pada Gambar 3.9 berikut.



Gambar 3.9 Grafik Fungsi $y = \sin t$ dan $y = \cos t$ dalam Satu Periode

Melalui kegiatan eksplorasi tersebut, peserta didik telah mengetahui bagaimana bentuk grafik $y = \sin t$ dan $y = \cos t$ dalam satu periodenya.

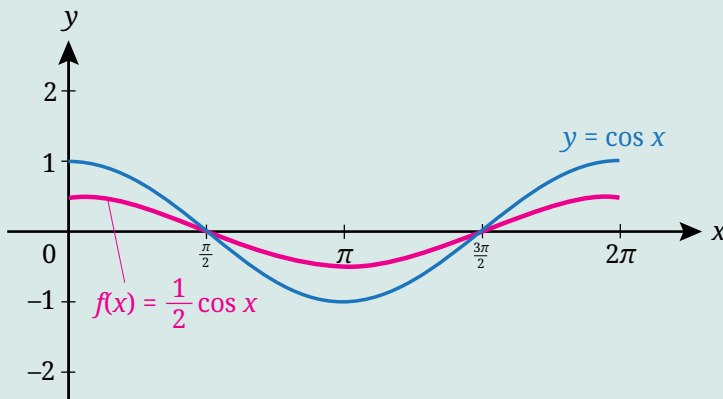
Bapak/Ibu Guru perlu menunjukkan bagaimana bentuk umum grafik kedua fungsi tersebut, seperti yang dijelaskan dalam Buku Siswa.

Bapak/Ibu Guru selanjutnya dapat menggunakan Contoh 3.9 untuk mendemonstrasikan bagaimana mensketsa keluarga fungsi sinus dengan menggunakan transformasi fungsi. Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 3.9. Melalui Mari Mencoba tersebut, peserta didik mensketsa transformasi grafik fungsi kosinus. Berikut ini alternatif penyelesaiannya.



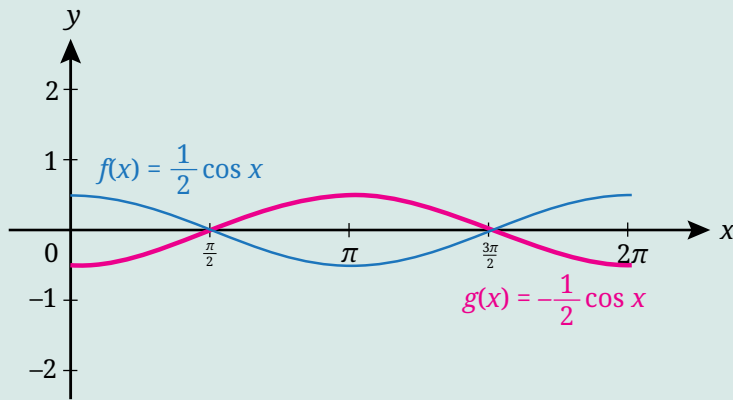
Mari Mencoba 3.9

1. Grafik $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$ dapat diperoleh dengan memampatkan grafik $y = \cos x$ secara vertikal dengan faktor $\frac{1}{2}$. Grafik fungsi f tersebut ditunjukkan pada Gambar 3.10.



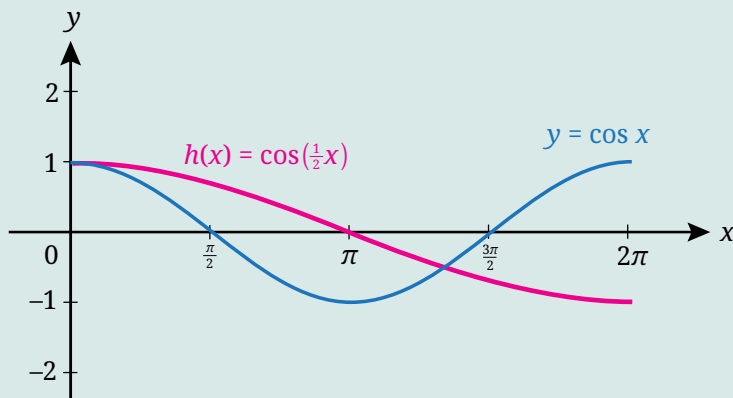
Gambar 3.10 Grafik Fungsi $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$

2. Grafik $g(x) = -\frac{1}{2} \cos x$ dapat diperoleh dengan mencerminkan grafik f pada bagian (1) terhadap sumbu- x . Grafik g tersebut ditunjukkan pada Gambar 3.11.



Gambar 3.11 Grafik Fungsi $g(x) = -\frac{1}{2} \cos x$

3. Grafik $h(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ dapat diperoleh dengan meregangkan grafik $y = \cos x$ secara horizontal dengan faktor 2. Grafiknya ditunjukkan pada Gambar 3.12.



Gambar 3.12 Grafik Fungsi $h(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

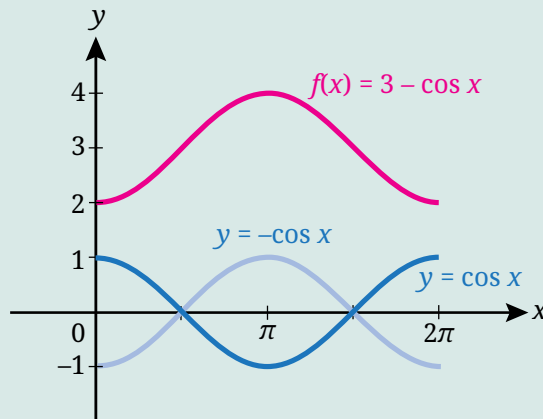
Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mencermati kembali grafik keluarga fungsi sinus dan fungsi kosinus untuk mengenalkan konsep amplitudo. Lanjutkan pembelajaran dengan menjelaskan Contoh 3.10.

Bapak/Ibu Guru kemudian perlu meminta peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 3.10. Setelah peserta didik selesai mengerjakannya, ajaklah untuk membandingkan dan mendiskusikan hasil pekerjaannya dengan hasil pekerjaan teman-temannya. Alternatif penyelesaian Mari Mencoba tersebut adalah sebagai berikut.



Mari Mencoba 3.10

Grafik fungsi $f(x) = 3 - \cos x$ dapat diperoleh dengan mencerminkan grafik $y = \cos x$ terhadap sumbu- x , kemudian menggesernya ke atas sejauh 3 satuan. Grafik fungsi f dalam satu periodenya ditunjukkan pada Gambar 3.13 berikut.



Gambar 3.13 Grafik Fungsi $f(x) = 3 - \cos x$

Sintesislah kegiatan pembelajaran sebelumnya dengan mendiskusikan Sifat 3.3. Sifat tersebut penting untuk mensketsa dan menganalisis grafik keluarga fungsi sinus dan fungsi kosinus.

Setelah peserta didik memahami Sifat 3.3 tersebut, mintalah mereka untuk mengerjakan kolom Mari Berpikir Kreatif secara berkelompok. Setelah itu, pilihlah satu atau beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasilnya.



Mari Berpikir Kreatif

1. Pendapat Dhien dan Ahmad sama-sama tepat. Grafik yang diberikan dapat dipandang sebagai transformasi $y = \sin x$, yaitu dimulai dengan meregangkannya secara vertikal dengan faktor 3 dan kemudian menggesernya ke kanan sejauh $\frac{\pi}{4}$. Grafik tersebut juga dapat dipandang sebagai transformasi $y = \cos x$, yaitu meregangkannya secara vertikal dengan faktor 3 dan kemudian menggesernya ke kanan sejauh $\frac{3\pi}{4}$.

2. Jawaban bervariasi. Salah satunya, Paulina awalnya menemukan bahwa grafik yang diberikan merupakan grafik dari

$$y = 3 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \text{ dan } y = 3 \cos \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)$$

Karena dia mengetahui bahwa kedua fungsi tersebut periodik dengan periode 2π , fungsi tersebut akan sama dengan pergeseran horizontalnya sejauh kelipatan dari 2π .

Jika memungkinkan, Bapak/Ibu Guru dapat menugaskan peserta didik untuk mengerjakan Aktivitas Interaktif (dalam Buku Siswa). Untuk informasi lebih lanjut, silakan baca kolom Alternatif Pembelajaran berikut.

Alternatif Pembelajaran

Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan media pembelajaran digital “Transformasi Fungsi Sinus dan Kosinus” untuk memfasilitasi peserta didik berlatih lebih mendalam tentang transformasi fungsi sinus dan fungsi kosinus. Media pembelajaran ini dapat diakses melalui tautan <https://s.id/trans-sin-cos> atau dengan memindai kode respons cepat di samping.



Untuk menggunakannya, Bapak/Ibu Guru perlu membuat kode kelas dan membagikan kode kelasnya kepada peserta didik. Mintalah mereka untuk menginputkan kode tersebut di laman <https://student.desmos.com/>. Bapak/Ibu Guru dapat menonton tutorialnya melalui tautan berikut.

<https://youtu.be/CDKQh011k64>

Aktivitas 7

Menganalisis Grafik Fungsi Tangen dan Transformasinya

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menganalisis grafik fungsi tangen dan transformasinya.

Bapak/Ibu Guru, awali Aktivitas 7 ini dengan menunjukkan grafik fungsi $y = \tan x$ (Gambar 3.35, Buku Siswa). Bersama peserta didik, analisislah grafiknya. Untuk melakukannya, Bapak/Ibu Guru dapat mengajukan pertanyaan-pertanyaan berikut.

Berapakah periode fungsi $y = \tan x$? Apa yang terjadi terhadap grafiknya ketika x mendekati $\frac{\pi}{2} + k\pi$, untuk sembarang bilangan bulat k ?

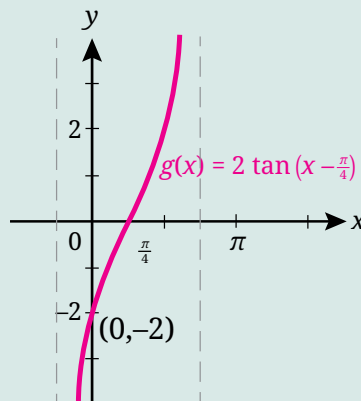
Pertanyaan terakhir tersebut dapat digunakan sebagai awalan untuk mengenalkan asimtot vertikal.

Setelah itu, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan Contoh 3.11 untuk mendemonstrasikan bagaimana menggunakan grafik $y = \tan x$ dan prinsip-prinsip transformasi fungsi untuk mensketsa grafik keluarga fungsi tangen. Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 3.11, kemudian membandingkan dan mendiskusikan hasil pekerjaannya dengan hasil pekerjaan teman-temannya.



Mari Mencoba 3.11

Grafik fungsi $g(x) = 2 \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ dapat dihasilkan dengan meregangkan grafik $y = \tan x$ secara vertikal dengan faktor 2, kemudian menggesernya ke kanan sejauh $\frac{\pi}{4}$. Grafik fungsi g tersebut ditunjukkan pada Gambar 3.14 berikut.



Gambar 3.14 Grafik Fungsi $g(x) = 2 \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Aktivitas 8

Memodelkan Permasalahan Sehari-hari

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari menggunakan fungsi trigonometri.

Bapak/Ibu Guru, mulailah Aktivitas 8 dengan bercerita tentang kegunaan fungsi trigonometri untuk memodelkan masalah sehari-hari. Salah satunya adalah fenomena pasang surut air laut. Gunakan Matematika dan Sains: Gelombang Pasut Menyelamatkan Kapal yang Tersangkut untuk membangun cerita tersebut.

Setelah itu, gunakan Contoh 3.12 untuk menunjukkan bagaimana menerapkan fungsi trigonometri untuk memodelkan fenomena pasang surut. Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 3.12 secara berkelompok. Pilihlah beberapa peserta didik untuk mempresentasikan hasilnya. Berikut ini alternatif penyelesaiannya.



Mari Mencoba 3.12

1. Berdasarkan informasi yang diberikan, kita mendapatkan amplitudo $0,9 : 2 = 0,45$ dan periode 12. Karena pasang laut terjadi ketika $x = 0$, fungsinya adalah $y = 0,45 \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$.
2. Pada pukul 07.00 ($x = 7$), ketinggian permukaan lautnya dapat ditentukan sebagai berikut.

$$y = 0,45 \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 7\right) = -\frac{9\sqrt{3}}{40} \approx -0,39$$

Jadi, ketinggian permukaan air lautnya kurang lebih 0,39 meter di bawah rata-rata. Hal ini sesuai dengan grafik yang diberikan.

Subbab C: Identitas Trigonometri

Aktivitas 9

Menggunakan Identitas-Identitas Trigonometri Dasar

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menggunakan identitas-identitas trigonometri dasar untuk membuktikan identitas-identitas trigonometri lainnya.

Bapak/Ibu Guru, mintalah peserta didik secara berpasangan untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Menemukan Identitas Trigonometri. Setelah itu, pilihlah beberapa peserta didik untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Alternatif penyelesaian kegiatan eksplorasi tersebut adalah sebagai berikut.



Eksplorasi

Menemukan Identitas Trigonometri

1. $P(\cos t, \sin t)$
2. Persamaan yang menyatakan jarak antara titik P dan titik asal $(0, 0)$ dapat ditentukan seperti berikut.

$$OP^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 \quad \text{Rumus Jarak (Teorema Pythagoras)}$$

$$1^2 = (\cos t - 0)^2 + (\sin t - 0)^2 \quad \text{Substitusi}$$

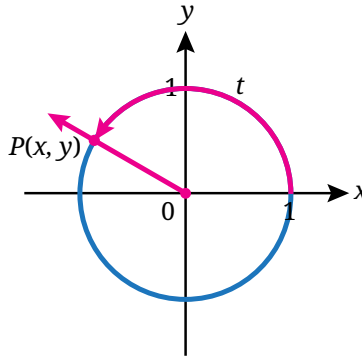
$$1 = \cos^2 t + \sin^2 t \quad \text{Sederhanakan}$$

Dengan demikian, kita mendapatkan persamaan $1 = \cos^2 t + \sin^2 t$ atau $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ yang berlaku untuk sembarang bilangan real t .

Jelaskan kepada peserta didik bahwa mereka menemukan sebuah persamaan yang selalu benar untuk sembarang bilangan real t pada kegiatan eksplorasi sebelumnya. Persamaan tersebut dinamakan identitas. Setelah itu, jelaskan identitas-identitas trigonometri yang terangkum dalam Sifat 3.4. Bapak/Ibu dapat mendemonstrasikan pembuktian untuk beberapa identitas trigonometri dalam Sifat 3.4 tersebut. Misalnya sebagai berikut.

Pembuktian

Berikut ini pembuktian identitas hasil bagi yang pertama. Misalkan t adalah sembarang bilangan real dan $P(x, y)$ adalah titik pada lingkaran satuan yang bersesuaian dengan sudut pusat t , seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.15.



Gambar 3.15 Titik $P(x, y)$ dan Sudut Pusat t

Berdasarkan Definisi 3.2, kita memperoleh

$$\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t} \text{ dengan } \cos t \neq 0$$

Selanjutnya, pembuktian untuk identitas Pythagoras yang kedua. Berdasarkan kegiatan eksplorasi sebelumnya, kita mengetahui bahwa $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Dengan membagi kedua ruas persamaan tersebut dengan $\cos^2 t$, kita memperoleh

$$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \quad \text{Bagi kedua ruas dengan } \cos^2 t$$

$$\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2 \quad \text{Sifat perpangkatan}$$

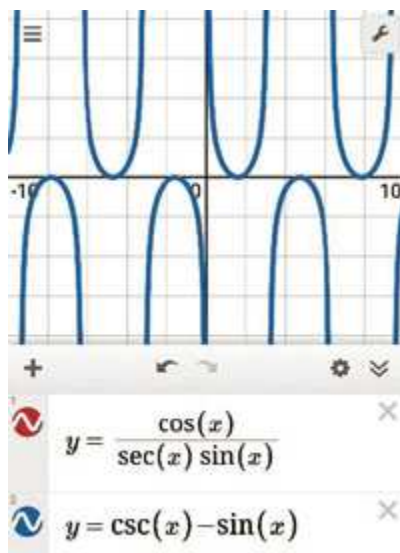
$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t \quad \text{Identitas hasil bagi dan identitas kebalikan}$$

Kita telah membuktikan identitas tersebut. Pembuktian identitas Pythagoras yang ketiga dapat dilakukan dengan cara serupa. ■

Setelah itu, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan Contoh 3.13 untuk mendemonstrasikan bagaimana menggunakan identitas-identitas trigonometri dasar untuk membuktikan identitas-identitas lainnya. Jika memungkinkan, gunakan kalkulator grafik (seperti Desmos dan

GeoGebra) untuk mengonfirmasi penyelesaian dalam contoh tersebut. (Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.42 dalam Buku Siswa.)

Setelah peserta didik memahaminya, mintalah mereka untuk mencermati Mari Mencoba 3.13. Pertama-tama, jika memungkinkan, mintalah mereka membuat sebuah konjektur/dugaan apakah persamaan yang diberikan merupakan identitas dengan menggunakan kalkulator grafik. Tampilan kalkulator grafiknya kurang lebih seperti pada Gambar 3.16.



Gambar 3.16 Tampilan Kalkulator Grafik

Dari kalkulator grafik tersebut, peserta didik diharapkan menduga bahwa persamaan yang diberikan memang identitas trigonometri karena kedua grafiknya berimpit. Setelah itu, mintalah mereka untuk membuktikannya secara formal, kemudian pilihlah satu atau beberapa peserta didik untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Berikut ini adalah alternatif pembuktiannya.



Mari Mencoba 3.13

Pembuktian dapat dilakukan dengan mengubah bentuk di ruas kanan agar sama dengan bentuk di ruas kiri seperti berikut.

$$\csc t - \sin t = \frac{1}{\sin t} - \sin t$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} \\
 &= \frac{\cos^2 t}{\sin t} \\
 &= \frac{\cos t}{\sec t \sin t}
 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa persamaan yang diberikan merupakan sebuah identitas.

Bapak/Ibu Guru, mintalah peserta didik untuk mengerjakan Mari Berkolaborasi secara berpasangan. Pada kegiatan tersebut, mereka diharapkan dapat membuat identitas trigonometri untuk dibuktikan oleh temannya, dan membuktikan identitas trigonometri yang diberikan temannya.



Mari Berkolaborasi

1. Jawaban bervariasi. Misalnya persamaan berikut merupakan sebuah identitas.

$$\sec x - \tan x = \frac{1}{\sec x + \tan x}$$

2. Pembuktian identitas pada nomor 1 adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \sec x - \tan x &= (\sec x - \tan x) \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right) \\
 &= \frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\sec x + \tan x} \\
 &= \frac{1}{\sec x + \tan x}
 \end{aligned}$$

Aktivitas 10

Menemukan Identitas Penjumlahan/Pengurangan

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menemukan identitas trigonometri yang melibatkan penjumlahan dan pengurangan sudut, kemudian menggunakannya untuk membuktikan identitas-identitas trigonometri lainnya.

Bapak/Ibu Guru, awalilah Aktivitas 10 dengan membagi peserta didik menjadi beberapa kelompok. Setelah itu, mintalah setiap kelompok untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Menemukan Identitas Penjumlahan Sudut untuk Kosinus. Setelah peserta didik menyelesaikannya, undanglah satu atau beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasilnya.



Eksplorasi

Menemukan Identitas Penjumlahan Sudut untuk Kosinus

1. Titik-titik P_1 , Q_0 , dan Q_1 berada pada lingkaran satuan dan sisi akhir dari sudut-sudut yang besarnya secara berturut-turut B , $A + B$, dan $-A$. Berdasarkan Definisi 3.2, koordinat ketiga titik tersebut adalah

$$P_1(\cos(A + B), \sin(A + B)),$$

$$Q_0(\cos(-A), \sin(-A)), \text{ dan}$$

$$Q_1(\cos B, \sin B).$$

2. Berdasarkan Sifat 3.2 (Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil), $\cos(-A) = \cos A$ dan $\sin(-A) = -\sin A$. Dengan demikian, koordinat Q_0 sama dengan $(\cos A, -\sin A)$.
3. Ruas garis $\overline{P_0P_1}$ dan $\overline{Q_0Q_1}$ memiliki panjang sama karena menghadap sudut pusat yang besarnya sama, yaitu $A + B$.
4. Dengan menggunakan fakta pada nomor 3, kita memperoleh

$$\sqrt{[\cos(A + B) - 1]^2 + [\sin(A + B) - 0]^2} = \sqrt{(\cos B - \cos A)^2 + (\sin B + \sin A)^2}$$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas persamaan tersebut dan menjabarkannya, kita mendapatkan

$$\cos^2(A + B) - 2 \cos(A + B) + 1 + \sin^2(A + B)$$

$$= \cos^2 B - 2 \cos A \cos B + \cos^2 A + \sin^2 B + 2 \sin A \sin B + \sin^2 A$$

Kita sederhanakan persamaan tersebut menggunakan identitas Pythagoras sehingga memperoleh

$$2 - 2 \cos (A + B) = 2 - 2 \cos A \cos B + 2 \sin A \sin B$$

Kita kurangi kedua ruas dengan 2, kemudian kita bagi kedua ruas dengan -2 sehingga

$$\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

Gunakan hasil penemuan peserta didik dalam kegiatan eksplorasi sebelumnya, yaitu $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$, untuk menemukan identitas pengurangan sudut untuk kosinus. Hal ini juga dijelaskan dalam Buku Siswa.

Setelah itu, gunakan Contoh 3.14 untuk mendemonstrasikan bagaimana menggunakan identitas penjumlahan/pengurangan sudut tersebut untuk membuktikan identitas lainnya. Sebagai catatan, identitas-identitas yang dibuktikan pada contoh ini nantinya digunakan lagi untuk pembuktian identitas-identitas lainnya.

Setelah peserta didik memahaminya, mintalah mereka untuk mengerjakan Mari Mencoba 3.14 secara berkelompok. Undanglah satu atau beberapa kelompok untuk menyampaikan hasil pekerjaannya.



Mari Mencoba 3.14

Berdasarkan Contoh 3.14, kita mengetahui bahwa $\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \sin (A + B) &= \cos \left[\frac{\pi}{2} - (A + B) \right] \\ &= \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} - A \right) - B \right] \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - A \right) \cos B + \sin \left(\frac{\pi}{2} - A \right) \sin B \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$. Dengan menggunakan hasil ini, kita memperoleh

$$\begin{aligned} \sin (A - B) &= \sin [A + (-B)] \\ &= \sin A \cos (-B) + \cos A \sin (-B) \\ &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$.

Subbab D: Aturan Sinus

Aktivitas 11

Menemukan dan Menggunakan Aturan Sinus

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menemukan Aturan Sinus secara terbimbing dan menggunakannya untuk menyelesaikan permasalahan.

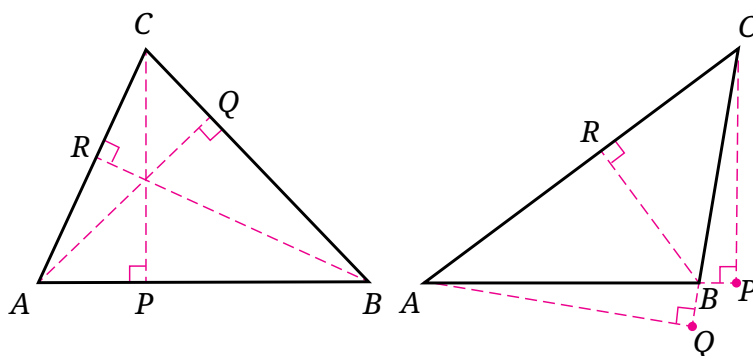
Bapak/Ibu Guru, mintalah peserta didik untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Menemukan Aturan Sinus. Bapak/Ibu dapat meminta mereka untuk bekerja bersama teman sebangkunya. Mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan kegiatan eksplorasi tersebut. Alternatif penyelesaiannya sebagai berikut.



Eksplorasi

Menemukan Aturan Sinus

1. Gambar 3.17 menunjukkan segitiga ABC beserta garis-garis tingginya.



Gambar 3.17 Segitiga ABC dan Garis-Garis Tingginya

2. Titik-titik P , Q , dan R dapat dilihat pada Gambar 3.17.
3. Dari segitiga ACP , $\sin A = \frac{CP}{AC}$.

4. Dari segitiga BCP dan segitiga BAQ , secara berturut-turut kita memperoleh

$$\sin B = \frac{CP}{BC} \qquad \sin B = \frac{AQ}{AB}$$

Dari segitiga CAQ , kita memperoleh

$$\sin C = \frac{AQ}{AC}$$

5. Berdasarkan nomor 3 dan 4, CP dan AQ muncul dua kali. Kita dapat mengubah persamaan pada kedua nomor tersebut yang memuat CP menjadi seperti berikut.

$$CP = AC \sin A \qquad CP = BC \sin B$$

Dengan demikian, kita memperoleh

$$AC \sin A = BC \sin B$$

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

Dengan cara yang sama, kita mendapatkan

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Dengan demikian, kita menemukan hubungan berikut.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Mintalah beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya, kemudian bahaslah secara klasikal. Hubungkan hasil penemuan peserta didik dengan Aturan Sinus dalam Sifat 3.5 (di Buku Siswa).

Setelah memahami Aturan Sinus, jika memungkinkan, tugaskan peserta didik untuk mengerjakan Mari Mengomunikasikan. Aktivitas ini dapat dilaksanakan secara mandiri maupun berkelompok. Mintalah beberapa peserta didik/kelompok menyampaikan hasil pekerjaan mereka di depan kelas. Berikut alternatif penyelesaiannya.



Mari Mengomunikasikan

Jawaban bervariasi. Misalnya, peserta didik dapat menggunakan kosinus untuk sudut A dan sudut B pada segitiga ACP dan BCP (lihat Gambar 3.17) sehingga mendapatkan

$$AP = b \cos A \qquad BP = a \cos B$$

Karena berdasarkan teorema Pythagoras $b^2 - AP^2 = CP^2$ dan $a^2 - BP^2 = CP^2$, maka

$$b^2 - b^2 \cos^2 A = a^2 - a^2 \cos^2 B$$

$$b^2(1 - \cos^2 A) = a^2(1 - \cos^2 B)$$

$$b^2 \sin^2 A = a^2 \sin^2 B$$

Karena a , b , $\sin A$, dan $\sin B$ dalam kasus ini tidak pernah negatif, maka

$$b \sin A = a \sin B$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

Untuk yang melibatkan sudut B dan panjang sisi c dapat dilakukan dengan cara serupa.

Bapak/Ibu Guru, gunakan Contoh 3.15 untuk mendemonstrasikan bagaimana menggunakan Aturan Sinus untuk menentukan panjang sisi sebuah segitiga. Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 3.15 secara mandiri. Berikut alternatif penyelesaiannya.



Mari Mencoba 3.15

Jumlah besar sudut-sudut dalam segitiga adalah 180° . Dengan demikian,

$$\angle C = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$$

Dengan Aturan Sinus, kita memperoleh

$$\frac{\sin C}{AB} = \frac{\sin B}{AC}$$

Aturan Sinus

$$AB = \frac{\sin C}{\sin B} \cdot AC$$

Sederhanakan

$$= \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot 12$$

Substitusi $AC = 12$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot 12 = 12\sqrt{3}$$

Sederhanakan

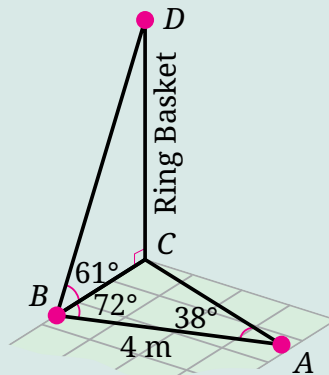
Jadi, panjang sisi AB adalah $12\sqrt{3}$ cm atau sekitar 20,78 cm.

Selanjutnya, gunakan Contoh 3.16 untuk menjelaskan bagaimana Aturan Sinus dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan sehari-hari. Setelah itu, mintalah peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 3.16. Berikut alternatif penyelesaiannya.



Mari Mencoba 3.16

Informasi dalam soal dapat diilustrasikan pada Gambar 3.18. Pada gambar tersebut, A adalah posisi Anwar dan B adalah posisi Beto.



Gambar 3.18 Posisi Anwar dan Beto terhadap Ring Basket

Perhatikan bahwa segitiga ABC dan BCD mempunyai satu sisi yang sama, yakni BC . Pada segitiga ABC , diperoleh

$$\angle ABC = 180^\circ - (38^\circ + 72^\circ) = 70^\circ.$$

Dengan memanfaatkan Aturan Sinus, kita memperoleh

$$\frac{BC}{\sin 38^\circ} = \frac{4}{\sin 70^\circ} \text{ atau } BC = \frac{4 \sin 38^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 2,621$$

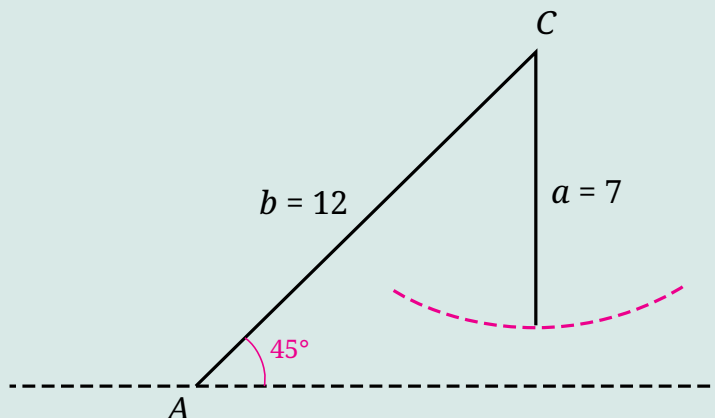
Jadi, jarak Beto ke tiang basket adalah sekitar 2,621 meter. Karena jarak lemparan 3 angka untuk permainan bola basket minimal sekitar 6,6-6,75 meter, Beto tidak mendapatkan 3 poin.

Bapak/Ibu Guru, lanjutkan kegiatan pembelajaran dengan meminta peserta didik untuk mengerjakan kolom Mari Berpikir Kritis secara berkelompok. Setelah mereka menyelesaikannya, mintalah satu atau beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Berikut ini alternatif penyelesaiannya.



Mari Berpikir Kritis

Pekerjaan Paulina, minimal perhitungannya, tidak keliru karena tidak ada segitiga ABC yang memiliki $\angle A = 45^\circ$, $a = 7$, dan $b = 12$. Informasi tersebut disajikan pada Gambar 3.19 berikut.



Gambar 3.19 Ilustrasi $\angle A = 45^\circ$ serta Ruas Garis $a = 7$ dan $b = 12$

Agar Paulina mendapatkan segitiga, minimal panjang a adalah

$$12 \sin 45^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \approx 8,49$$

Subbab E: Aturan Kosinus

Aktivitas 12

Menemukan dan Menggunakan Aturan Kosinus

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menemukan Aturan Kosinus secara terbimbing dan menggunakannya untuk menyelesaikan permasalahan.

Bapak/Ibu Guru, bagilah peserta didik ke dalam kelompok-kelompok kecil yang memungkinkan mereka dapat belajar secara efektif dan efisien. Beri tahu peserta didik bahwa mereka akan menemukan Aturan Kosinus, kemudian mintalah setiap kelompok untuk mengerjakan kegiatan Eksplorasi: Menemukan Aturan Kosinus. Berikut ini alternatif penyelesaian kegiatan eksplorasi tersebut.



Eksplorasi

Menemukan Aturan Kosinus

1. Titik C berada pada lingkaran yang berpusat di $(0, 0)$ dan berjari-jari b . Karena titik ini berada pada sisi akhir sudut yang besarnya A , koordinat titik tersebut adalah $(b \cos A, b \sin A)$.
2. Berdasarkan rumus jarak (teorema Pythagoras), kuadrat jarak antara B dan C adalah

$$BC^2 = (b \cos A - c)^2 + (b \sin A - 0)^2 \quad \text{Rumus jarak}$$

$$= b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A \quad \text{Sederhanakan}$$

$$= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{Faktorkan}$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{Identitas Pythagoras}$$

3. Karena $BC = a$, hasil dari nomor 2 dapat dinyatakan ke dalam $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

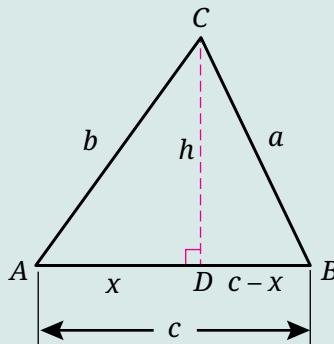
Bapak/Ibu Guru dapat meminta beberapa kelompok untuk mempresentasikan jawabannya dan berilah kesempatan kepada peserta didik lainnya untuk menanggapi jawaban tersebut. Bapak/Ibu Guru perlu menghubungkan diskusi tersebut dengan Aturan Kosinus yang terangkum dalam Sifat 3.6 (di Buku Siswa).

Jika memungkinkan, ajaklah peserta didik bereksplorasi untuk menemukan strategi yang berbeda dalam menemukan atau membuktikan Aturan Kosinus. Untuk itu, mintalah mereka mengerjakan kolom Mari Mengomunikasikan. Alternatif penyelesaiannya adalah sebagai berikut.



Mari Mengomunikasikan

Jawaban bervariasi, misalnya terlebih dahulu menggunakan segitiga lancip ABC seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.20.



Gambar 3.20 Segitiga Lancip ABC

Dengan menggunakan teorema Pythagoras, kita mendapatkan $b^2 = x^2 + h^2$ dan $a^2 = (c - x)^2 + h^2$ atau kalau dijabarkan menjadi $a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$. Dengan mensubstitusi persamaan pertama ke persamaan terakhir, kita mendapatkan $a^2 = c^2 + b^2 - 2cx$. Karena $x = b \cos A$, maka

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Cara yang serupa juga dapat dilakukan untuk segitiga tumpul.

Selanjutnya, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan Contoh 3.17 untuk mendemonstrasikan bagaimana menggunakan Aturan Kosinus untuk

menentukan besar salah satu sudut sebuah segitiga jika panjang ketiga sisinya diketahui. Setelah itu, mintalah peserta didik mengerjakan Mari Mencoba 3.17 secara mandiri. Berikut ini alternatif penyelesaiannya.



Mari Mencoba 3.17

Dengan memanfaatkan Aturan Kosinus, kita memperoleh

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2(PQ)(QR) \cos Q \quad \text{Aturan Kosinus}$$

$$\cos Q = \frac{PQ^2 + QR^2 - PR^2}{2(PQ)(QR)} \quad \text{Bentuk yang setara}$$

$$= \frac{10^2 + 7^2 - 5^2}{2(10)(7)} = \frac{124}{140} = \frac{31}{35} \quad \text{Substitusi dan sederhanakan}$$

Dengan memanfaatkan kalkulator, kita mendapatkan besar sudut Q sekitar $27,66^\circ$.

Tunjukkan beberapa peserta didik untuk mempresentasikan jawabannya. Bapak/Ibu Guru perlu memberikan konfirmasi terhadap jawaban peserta didik tersebut.

Selanjutnya, Bapak/Ibu Guru dapat memperdalam pemahaman pengetahuan peserta didik tentang Aturan Kosinus dengan meminta mereka untuk mengerjakan aktivitas Mari Berpikir Kritis. Aktivitas ini membantupesertadidikmelihatbagaimanamanfaatAturanKosinusdalam memperoleh teorema Pythagoras. Berikut alternatif penyelesaiannya.



Mari Berpikir Kritis

Berdasarkan Aturan Kosinus, kita memiliki $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

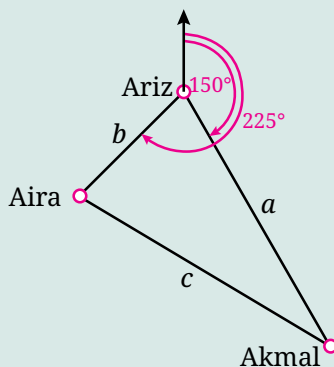
- Jika sudut A siku siku, nilai $\cos A = 0$ sehingga $a^2 = b^2 + c^2$.
- Jika $\angle A < 90^\circ$, nilai $\cos A > 0$ sehingga $(b^2 + c^2) - a^2 = 2bc \cos A$ positif. Jadi, $a^2 < b^2 + c^2$.
- Jika $\angle A > 90^\circ$, nilai $\cos A < 0$ sehingga $(b^2 + c^2) - a^2 = 2bc \cos A$ negatif. Jadi, $a^2 > b^2 + c^2$.

Setelah peserta didik mampu menggunakan Aturan Kosinus untuk menyelesaikan segitiga, ajaklah peserta didik memahami penggunaan aturan tersebut untuk menyelesaikan permasalahan sehari-hari. Untuk itu, jelaskan Contoh 3.18 dan mintalah mereka untuk mengerjakan Mari Mencoba 3.18. Berikut alternatif penyelesaiannya.



Mari Mencoba 3.18

Perhatikan ilustrasi pada Gambar 3.21.



Gambar 3.21 Posisi Akmal, Aira, dan Ariz

Kecepatan lari Akmal dan Aira secara berturut-turut adalah 2 m/s dan 1 m/s. Setelah berlari 10 detik, jarak tempuh kedua anak tersebut adalah

$$a = 20 \text{ m} \quad \text{dan} \quad b = 10 \text{ m}$$

Sudut yang dibentuk antara a dan b adalah $225^\circ - 150^\circ = 75^\circ$. Dengan memanfaatkan Aturan Kosinus, kita memperoleh

$$c^2 = 20^2 + 10^2 - 2(20)(10) \cos 75^\circ$$

$$= 500 - 400 \cos 75^\circ$$

$$c = \sqrt{500 - 400 \cos 75^\circ} \approx 19,91$$

Jadi, jarak tempat persembunyian Akmal dengan Aira adalah sekitar 19,91 m.

Alternatif Pembelajaran

Alternatif Pembelajaran ini dapat dianggap sebagai Aktivitas 13. Tujuannya adalah agar peserta didik dapat membagi kasus-kasus ambigu pada segitiga (khususnya pada segitiga sudut-sisi-sisi) menjadi beberapa kategori berdasarkan banyak selesiannya. Untuk melakukannya, Bapak/Ibu Guru dan peserta didik dapat menggunakan media pembelajaran melalui tautan <https://s.id/segitiga-dss>. Media pembelajaran tersebut juga dapat diakses dengan memindai kode respons cepat di samping.



Untuk membimbing peserta didik dalam kegiatan eksplorasinya, gunakan pertanyaan-pertanyaan pemandu berikut.

1. Kapan kamu mendapatkan tepat satu segitiga?
2. Kapan kamu mendapatkan dua kemungkinan segitiga?
3. Kapan kamu tidak mendapatkan segitiga?

Setelah itu, mintalah beberapa peserta didik untuk mempresentasikan hasil eksplorasi mereka. Koneksikan hasil presentasi peserta didik sehingga Bapak/Ibu Guru menyampaikan sebuah kesimpulan seperti pada tabel berikut. Dalam tabel tersebut, h adalah garis tinggi dari titik C .

No.	Kasus	Banyak Segitiga
1.	$A < 90^\circ$ dan $a < h$	0
2.	$A > 90^\circ$ dan $a < b$	0
3.	$A < 90^\circ$ dan $a = h$	1
4.	$A < 90^\circ$ dan $a \geq b$	1
5.	$A > 90^\circ$ dan $a > b$	1
6.	$A < 90^\circ$ dan $h < a < b$	2

Setelah mendapatkan simpulan tersebut, mintalah peserta didik untuk mengecek kembali kolom Mari Berpikir Kritis pada akhir Subbab D dan tanyakan kembali tentang segitiga Paulina. Harapannya, mereka akan menunjukkan bahwa segitiganya Paulina berada pada kasus 1, yaitu $A < 90^\circ$ dan $a < h$ sehingga tidak memiliki solusi.

F. Tindak Lanjut

Kegiatan tindak lanjut dapat berupa remedial dan pengayaan. Untuk mendeteksi perlu tidaknya kegiatan remedial, Bapak/Ibu Guru dapat menugaskan peserta didik untuk mengerjakan soal-soal latihan pada setiap akhir subbab. Analisislah hasil pekerjaan peserta didik untuk memutuskan apakah mereka sudah siap untuk melanjutkan ke pembelajaran berikutnya. Jika belum, Bapak/Ibu dapat mendesain kegiatan remedial, misalnya pengajaran sebaya.

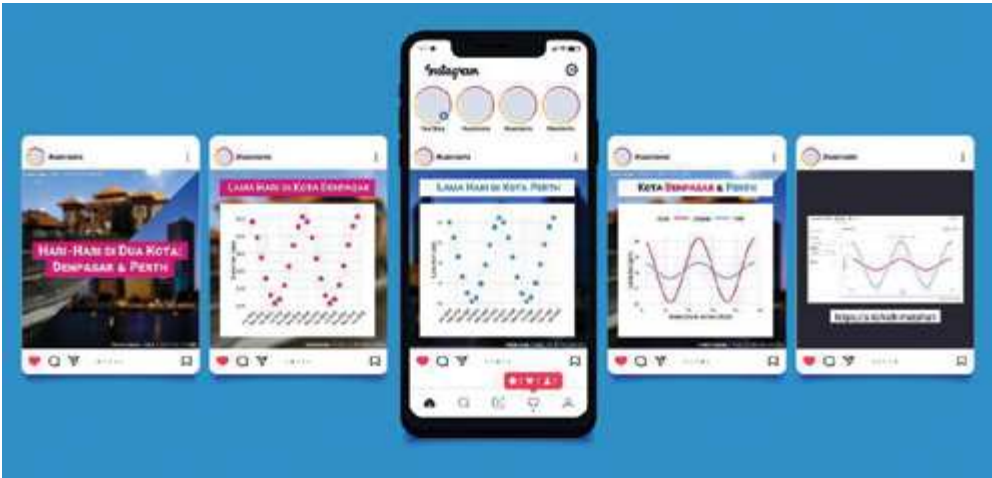
Kegiatan pengayaan diberikan kepada peserta didik yang kecepatan belajarnya lebih cepat dibandingkan teman-temannya. Bapak/Ibu dapat menggunakan bagian Pengayaan dalam Buku Siswa, misalnya, untuk memfasilitasi peserta didik yang demikian. Dalam kegiatan Pengayaan tersebut, peserta didik diminta untuk membuktikan beberapa identitas trigonometri tingkat lanjut. Dalam menyusun pembuktiannya, mereka dapat merujuk dari berbagai sumber (misalnya buku teks lain dan internet).

G. Asesmen Sumatif

Sebagai asesmen sumatif, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan bagian Uji Kompetensi dan Proyek. Uji Kompetensi tersebut dapat digunakan untuk mengukur sejauh mana ketercapaian tujuan pembelajaran dalam topik fungsi trigonometri secara keseluruhan. Untuk Proyek, kegiatan tersebut tidak hanya menuntut akurasi matematisnya, tetapi juga keterampilan-keterampilan umum lainnya, seperti kolaborasi dan komunikasi.

Bapak/Ibu Guru dapat menyusun rubrik tersendiri untuk menilai hasil kerja peserta didik dalam Proyek. Rubrik tersebut bergantung pada bentuk penugasannya. Jika memungkinkan, Bapak/Ibu Guru

dapat menugaskan peserta didik untuk memublikasikan hasil pekerjaan mereka dalam proyek tersebut melalui media sosial. Agar mudah ditemukan oleh teman-temannya, mintalah mereka untuk menggunakan tagar #ProyekTrigonometri dan #KalkulatorMatahari seperti yang diperintahkan dalam soal terakhir dalam Proyek (lihat Buku Siswa). Gambar 3.22 berikut menunjukkan contoh kemungkinan pos peserta didik di media sosial mereka.



Gambar 3.22 Contoh Pos Media Sosial Peserta Didik
Sumber: (Gambar diadaptasi dari Freepik)

Rubrik yang dapat digunakan untuk menilai pos media sosial tersebut disajikan pada Tabel 3.4. Sebelum peserta didik mengerjakan proyek, Bapak/Ibu Guru perlu menjelaskan rubrik ini sehingga mereka mengetahui ekspektasi Bapak/Ibu terhadap hasil pekerjaan mereka.

Tabel 3.4 Contoh Rubrik Penilaian

Aspek	Kurang	Cukup	Baik
Matematika (40%)	Sebagian besar kontennya secara matematis tidak tepat (konsep dan prosedurnya). Representasi matematika yang di-presentasikan (simbol, persamaan, diagram, dan tabel) tidak sesuai atau tidak tepat.	Sebagian kecil konten tidak tepat. Sebagian kecil representasi matematikanya tidak sesuai atau tidak tepat.	Semua kontennya akurat. Hampir semua atau semua representasi matematikanya sesuai dan tepat.

Aspek	Kurang	Cukup	Baik
Struktur Konten (30%)	Konten tidak memiliki struktur yang jelas.	Konten sudah cukup terstruktur.	Konten memiliki struktur yang baik dan mudah diikuti dan dipahami.
Komunikasi Tulis (10%)	Banyak kekeliruan dalam hal penulisan sehingga keterbacaannya kurang.	Konten memuat sedikit kesalahan penulisan dan dapat mengomunikasikan ide secara efektif.	Konten tidak memiliki kesalahan penulisan dan dapat mengomunikasikan ide secara efektif.
Rujukan dan Kredit (10%)	Konten tidak mencantumkan rujukan maupun memberikan kredit yang tepat.	Konten telah memberikan rujukan dan kredit, tetapi kurang tepat.	Konten telah memberikan rujukan dan kredit yang tepat.
Keamanan Data (10%)	Konten menunjukkan data personal dan privat yang seharusnya perlu dilindungi.	Penyajian konten sudah cukup melindungi data personal dan privat.	Penyajian konten telah melindungi data yang sifatnya personal dan privat.

H. Kunci Jawaban

1. Latihan A Fungsi Trigonometri dan Lingkaran Satuan

- Salah. Sebuah sudut berada dalam posisi baku jika sisi awalnya berimpit dengan sumbu- x positif dan titik sudutnya berimpit dengan titik asal.
- $\frac{\pi}{180}$
- $\cos t = x$; $\sin t = y$; $\tan t = \frac{y}{x}$; $\sec t = \frac{1}{x}$; $\csc t = \frac{1}{y}$; $\cot t = \frac{x}{y}$.
- Garis yang diberikan melalui titik (2, 40) sehingga panjang jari-jarinya adalah $40 : 2 = 20$.
- $45^\circ = 45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$ rad
 $144^\circ = 144 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{5}$ rad
 $306^\circ = 306 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{17\pi}{10}$ rad
- $3 \text{ rad} = 3 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{540^\circ}{\pi}$

$$\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \left(\frac{3\pi}{4}\right)\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = 135^\circ$$

$$\frac{11\pi}{6} \text{ rad} = \left(\frac{11\pi}{6}\right)\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = 330^\circ$$

$$7. \sin t = -\frac{2}{3}; \cos t = -\frac{5}{3}; \tan t = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{5}{3}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$8. \sin 0 = 0; \cos 0 = 1; \tan 0 = 0$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1; \cos \frac{3\pi}{2} = 0; \tan \frac{3\pi}{2} \text{ tak terdefinisi}$$

9. Titik (8, -15) dilalui oleh lingkaran yang berpusat di $O(0, 0)$ dan berjari-jari

$$\sqrt{8^2 + (-15)^2} = 17$$

Dengan demikian,

$$\sin \alpha = -\frac{15}{17}, \cos \alpha = \frac{8}{17}, \text{ dan } \tan \alpha = -\frac{15}{8}$$

Besar sudut β adalah $\beta = \frac{23\pi}{23} = \frac{\pi}{3}$. Dengan demikian,

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \beta = \frac{1}{2}, \text{ dan } \tan \beta = \sqrt{3}$$

10. a. Bilangan acuan untuk $t = \frac{5\pi}{4}$ adalah $\frac{\pi}{4}$

$$\text{Bilangan acuan untuk } t = \frac{5\pi}{3} \text{ adalah } \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Bilangan acuan untuk } t = \frac{11\pi}{6} \text{ adalah } \frac{\pi}{6}$$

- b. Dengan menggunakan bilangan acuannya, nilai keenam fungsi trigonometri untuk $t = \frac{5\pi}{4}$ (kuadran III) dapat ditentukan seperti berikut.

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\csc\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\csc\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sec\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\cot\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Nilai keenam fungsi trigonometri untuk $t = \frac{5\pi}{3}$ (kuadran IV) adalah sebagai berikut.

$$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \csc\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\csc\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \sec\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \quad \cot\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Nilai keenam fungsi trigonometri untuk $t = \frac{11\pi}{6}$ (kuadran IV) adalah sebagai berikut.

$$\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \quad \csc\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\csc\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sec\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cot\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

11. Dengan menggunakan Sifat 3.2 (Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil), kita memperoleh

$$\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \text{ dan}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

12. a. Sudut pusatnya $\theta = 173^\circ = \frac{173\pi}{180}$. Dengan demikian, jari-jari bumi adalah

$$r = \frac{19.150,3}{\frac{173\pi}{180}} \approx 6.342,38 \text{ km}$$

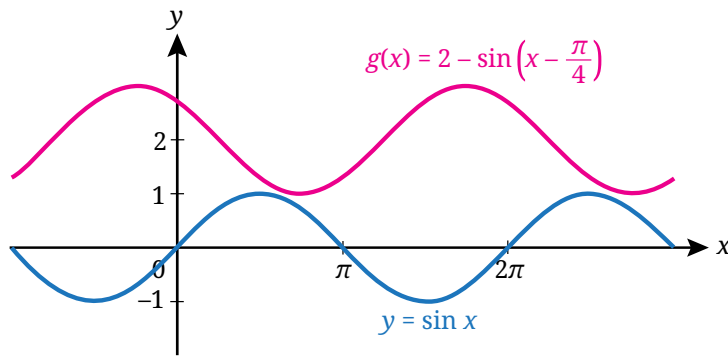
- b. Jawaban pada bagian (a) tidak sama. Hal ini karena adanya pembulatan dalam perhitungan. Selain itu, informasi dalam soal (tentang besar sudut pusat dan jarak antarkotanya) kemungkinan juga merupakan pembulatan.

13. Besar sudut pusatnya adalah $\theta = 26^\circ = \frac{13\pi}{90}$. Dengan menggunakan informasi jari-jari bumi dari NASA, jarak kedua tempat tersebut adalah

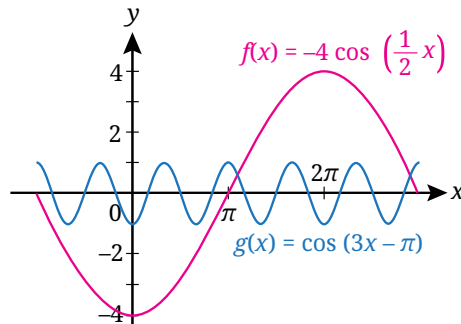
$$d = \frac{13\pi}{90} \cdot 6.378,137 \approx 2.894,31 \text{ km}$$

2. Latihan B Grafik Fungsi Trigonometri

1. Salah. Pergeserannya ke kiri sejauh $\frac{\pi}{4}$ satuan.
2. $|a|; \frac{2\pi}{k}$
3. Benar
4. π
5. Grafik diperoleh dengan menggeser grafik $y = \sin x$ ke kanan sejauh $\frac{\pi}{4}$, kemudian mencerminkan hasilnya terhadap sumbu- x , dan kemudian menggesernya ke atas sejauh 2 satuan. Hasilnya ditunjukkan pada gambar berikut.



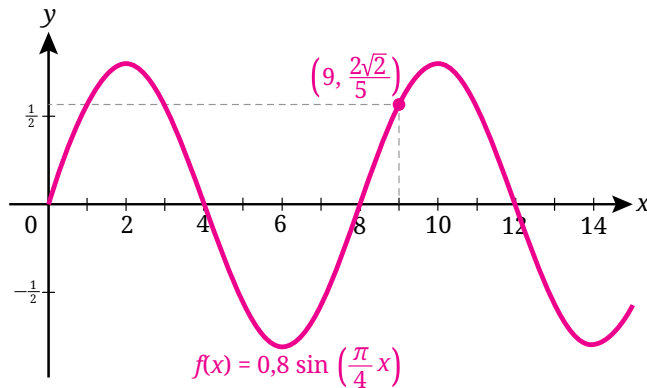
6. a. Amplitudo dan periode fungsi f secara berturut-turut adalah 4 dan 4π , sedangkan amplitudo dan periode fungsi g secara berturut-turut adalah 1 dan $\frac{2\pi}{3}$.
b. Grafik fungsi f dan g ditunjukkan pada gambar berikut.



7. Grafik fungsi $y = 2 \cos(\frac{2}{3}x)$ memiliki amplitudo 2 dan periode 3π . Dengan demikian, grafik yang paling tepat adalah gambar grafiknya Dona.

8. a. $f(x) = 0,8 \sin \left(\frac{\pi}{4} x \right)$

b. Grafik fungsi f ditunjukkan pada gambar berikut.



c. $f(9) = \frac{2\sqrt{2}}{5} \approx 0,57$. Jadi, posisi pelampung tersebut 0,57 m di atas ketinggian rata-ratanya.

9. a. Ketinggian orang tersebut terhadap pusat kincir ria tersebut setiap menitnya adalah

$$h(x) = 25 \cos \left(\frac{2\pi}{15} x \right)$$

b. Ketika $x = 10$ menit, ketinggian orang tersebut adalah $h(10) = -\frac{25}{2} = -12,5$. Dengan demikian, ketinggiannya 12,5 m di bawah pusat kincir ria tersebut.

c. Ketinggian orang tersebut relatif terhadap tanah setiap waktunya dapat dimodelkan menjadi

$$h(x) = 25 \cos \left(\frac{2\pi}{15} x \right) + 27$$

3. Latihan C Identitas Trigonometri

1. Salah. Persamaan $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ dan $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$ tidak ekuivalen, misalnya ketika $t = \frac{5\pi}{4}$.

2. 1

3. Benar

4. a. Pembuktian untuk identitas pertama adalah sebagai berikut.

$$\frac{\sin t}{\tan t} = \frac{\sin t}{\frac{\sin t}{\cos t}} = \cos t$$

b. Pembuktian untuk identitas kedua adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x} &= \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}} \\&= \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} \right) \\&= \frac{1 + 2 \sin x + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \\&= \frac{1 + 2 \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

5. a. Untuk $x = y = \frac{\pi}{6}$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6}$$

b. Untuk $x = \frac{\pi}{4}$,

$$\csc^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 + 2 = 4 \neq 1$$

6. Pertama, Abel tidak seharusnya mengasumsikan $\sin t = \sin(-t)$ karena persamaan ini yang akan dibuktikan. Kedua, ketika dia menguadratkan kedua ruas persamaan, dia tidak mendapatkan persamaan yang ekuivalen.

7. Nilai sinus dan kosinus sudut $\frac{5\pi}{12}$ dapat ditentukan seperti berikut.

$$\begin{aligned}\sin \frac{5\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \\&= \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\&= \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \frac{5\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \\&= \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} \\&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\&= \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})\end{aligned}$$

8. Pembuktiannya adalah seperti berikut.

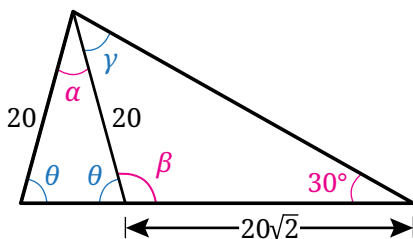
$$\begin{aligned}\tan(A + B) &= \frac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)} \\ &= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B} \left(\frac{\frac{1}{\cos A \cos B}}{\frac{1}{\cos A \cos B}} \right) \\ &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}\end{aligned}$$

Dengan menggunakan hasil sebelumnya, kita memperoleh

$$\begin{aligned}\tan(A - B) &= \tan[A + (-B)] \\ &= \frac{\tan A + \tan(-B)}{1 - \tan A \tan(-B)} \\ &= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}\end{aligned}$$

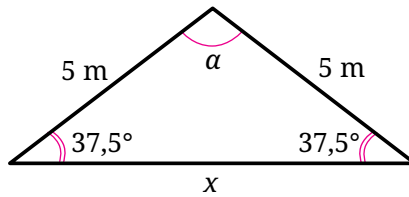
4. Latihan D Aturan Sinus

1. Benar
2. Benar
3. Benar
4. Berdasarkan Aturan Sinus, diperoleh $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{15 \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 15\sqrt{2}$
5. Dengan Aturan Sinus, diperoleh $\sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{10 \sin 145^\circ}{6} \approx 0,95596$.
Dengan menggunakan kalkulator, $\angle B \approx 72,93^\circ$.
6. Perhatikan gambar di bawah ini!



Berdasarkan Aturan Sinus, $\sin \gamma = \frac{20\sqrt{2} \sin 30^\circ}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Akibatnya $\gamma = 45^\circ$. Dengan demikian, $\beta = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$. Akibatnya, $\theta = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$ sehingga $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$.

7. Perhatikan gambar di bawah ini!



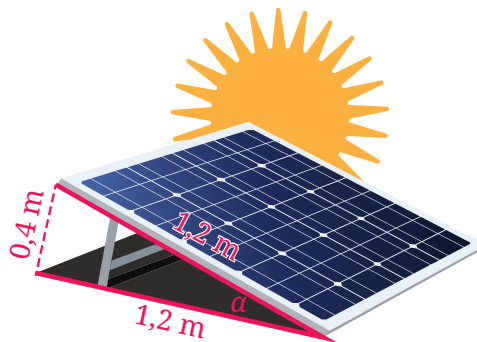
Perhatikan bahwa $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 37,5^\circ = 105^\circ$. Berdasarkan Aturan Sinus, diperoleh $x = \frac{5 \sin 105^\circ}{\sin 37,5^\circ} \approx 7,93$.

Jadi, keliling kandang ayam tersebut adalah sekitar $5 + 5 + 7,93 = 17,93$ meter. Luas kandang ayam tersebut dapat ditentukan seperti berikut.

$$L = \frac{1}{2} (5)(5) \sin 105^\circ \approx 12,07$$

Jadi, luasnya adalah sekitar $12,07 \text{ m}^2$.

8. Perhatikan gambar di bawah ini!



Karena total sudut segitiga adalah 180° , maka diperoleh $x = 90^\circ - \frac{1}{2} \alpha$. Berdasarkan Aturan Sinus, kita mendapatkan

$$\frac{\sin \alpha}{0,4} = \frac{\sin(90^\circ - \frac{1}{2} \alpha)}{1,2} = \frac{\cos(\frac{1}{2} \alpha)}{1,2}$$

Akibatnya, $\frac{\sin \alpha}{\cos(\frac{1}{2} \alpha)} = \frac{1}{3}$ atau $\frac{2 \sin(\frac{1}{2} \alpha) \cos(\frac{1}{2} \alpha)}{\cos(\frac{1}{2} \alpha)} = \frac{1}{3}$. Dengan demikian, kita mendapatkan $\sin(\frac{1}{2} \alpha) = \frac{1}{6}$. Dengan perhitungan

kalkulator, kita memperoleh $\frac{1}{2} \alpha = 9,6^\circ$ atau $\alpha = 19,2^\circ$.

5. Latihan E Aturan Kosinus

1. Benar
2. Benar
3. Salah. Berdasarkan Aturan Kosinus, diperoleh

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2R \times R \cos 120^\circ = 3R^2$$

Dengan demikian, $a = \sqrt{3} R$.

4. $2\sqrt{19}$
5. $86,42^\circ$ (pembulatan)
6. Berdasarkan Aturan Kosinus, diperoleh

$$(2\sqrt{91})^2 = 12^2 + 10^2 - 2 \times 12 \times 10 \cos \theta$$

Jadi, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$. Akibatnya, besar sudut θ adalah 120° .

7. Berdasarkan Aturan Kosinus, diperoleh

$$20^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \times 15 \times 10 \cos 40^\circ$$

Persamaan tersebut ekuivalen dengan $\cos 40^\circ = -\frac{1}{4}$. Hal ini tentu tidak mungkin karena nilai dari $\cos 40^\circ$ positif.

8. Berdasarkan Aturan Kosinus, yakni $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos B$, maka diperoleh $6^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \cos B$. Jadi, $\cos B = \frac{19}{35}$. Akibatnya, $\angle B \approx 57,12^\circ$. Dengan cara yang serupa, kita mendapatkan $\angle A \approx 78,46^\circ$. Dengan demikian, $\angle C \approx 180^\circ - (57,12^\circ + 78,46^\circ) = 44,42^\circ$.

6. Uji Kompetensi

1. Benar
2. Salah. Nilai $\sin \frac{13\pi}{12} = -\sin \frac{\pi}{12}$ karena sudut $\frac{13\pi}{12}$ berada di kuadran III.
3. Salah. Nilai $y = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \tan 0 = 0$.
4. Benar
5. Benar
6. $4,5 - \pi \approx 1,36$

7. $\frac{3}{2}; 8$

8. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

9. $\cos^2 x$

10. $\sqrt{2}$

11. $\tan \frac{3\pi}{4} = -1, \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{11\pi}{3} = \frac{1}{2}$

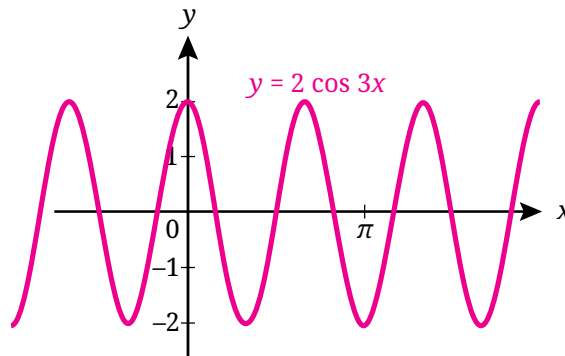
12. a. Pembuktiannya dapat dimulai dari ruas kanan seperti berikut.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos t} - \frac{1}{\sec t} &= \frac{1}{\cos t} - \cos t = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} \\ &= \frac{\sin^2 t}{\cos t} = \frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{\frac{1}{\sin t}} = \frac{\tan t}{\csc t} \end{aligned}$$

b. Pembuktiannya dapat dimulai dari ruas kiri seperti berikut.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + \sin y)(1 - \sin y)} &= \frac{1}{1 - \sin^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} \\ &= \sec^2 y = 1 + \tan^2 y \end{aligned}$$

13. Grafik fungsi $y = 2 \cos 3x$ memiliki amplitudo 2 dan periode $\frac{2\pi}{3}$. Grafiknya ditunjukkan pada gambar berikut.



14. $\angle B \approx 41,8^\circ, \angle C \approx 108,2^\circ$, dan $c \approx 142,5$.

15. $x = \sqrt{151} \approx 12,29$

16. $y = 15 \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

17. a. Diameternya 11 m.

- b. Periodenya 14 menit.
- c. Jawaban bervariasi. Misalnya 3,5 menit; 17,5 menit; dan 31,5 menit.

18. $AC \approx 49,54 \text{ m}$

19. Luasnya $36,81 \text{ m}^2$

20. Strategi Aldo tidak tepat. Karena Aldo membuktikan kebenaran persamaannya untuk tiga nilai θ , bukan berarti persamaan tersebut benar untuk semua bilangan real θ .

21. Misalkan diberikan segitiga ABC yang panjang sisi-sisinya a , b , dan c , serta besar ketiga sudutnya diketahui. Dengan menggunakan Aturan Sinus, kita mendapatkan

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

Berdasarkan hasil Mari Berpikir Kreatif pada akhir Subbab A, kita mengetahui bahwa $L = \frac{1}{2}ab \sin C$. Dengan demikian,

$$L = \frac{1}{2}a \left(\frac{a \sin B}{\sin A} \right) \sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$

Dua rumus lainnya dapat dibuktikan dengan cara serupa.

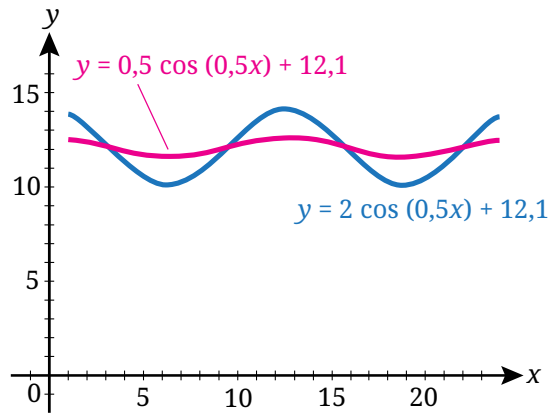
7. Proyek: Variasi Lama Hari di Denpasar dan Perth

1. Kota Denpasar direpresentasikan oleh grafik berwarna merah, sedangkan Kota Perth direpresentasikan oleh grafik berwarna biru. Lama hari di Kota Perth lebih bervariasi daripada lama hari di Kota Denpasar karena jaraknya yang lebih jauh dari garis khatulistiwa.
2. Model yang ditemukan peserta didik dapat bervariasi karena didasarkan pada perkiraan. Akan tetapi, model tersebut seharusnya mendekati model berikut.

Kota Denpasar: $y = 0,5 \cos (0,5x) + 12,1$

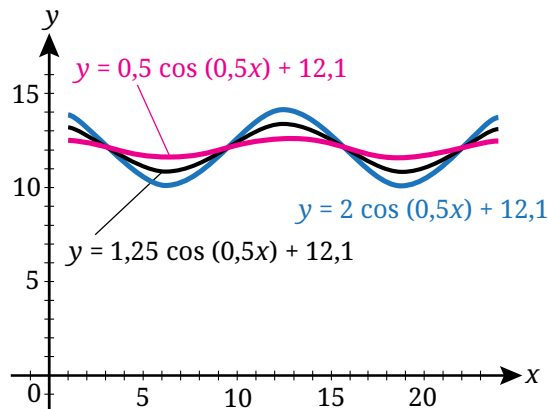
Kota Perth: $y = 2 \cos (0,5x) + 12,1$

Model tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.

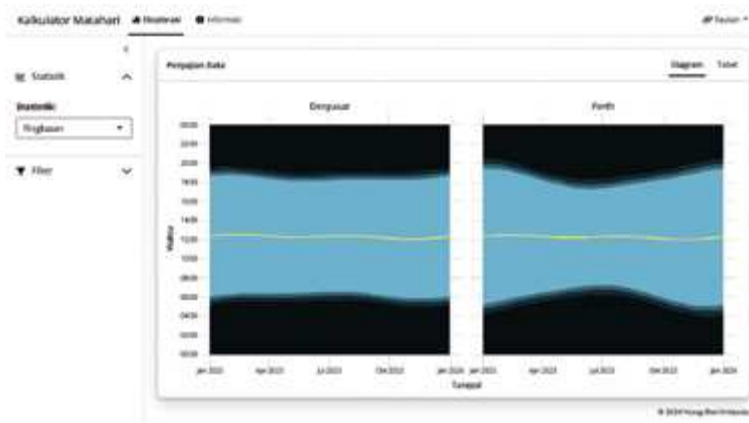


Data dan model lama hari Denpasar dan Perth tersebut secara lengkap juga dapat diakses melalui tautan <https://www.desmos.com/calculator/rcukmnpouy>.

3. Karena Kota Karratha terletak di antara Kota Denpasar dan Kota Perth, amplitudo grafiknya juga di antara amplitudo grafik Denpasar dan Perth. Sketsa grafiknya ditunjukkan sebagai berikut.



4. Jika memungkinkan, Bapak/Ibu Guru juga dapat menugaskan peserta didik untuk bereksplorasi tentang lamanya hari di beberapa kota (selain Denpasar dan Perth) melalui media pembelajaran interaktif. Media pembelajaran tersebut dapat diakses melalui tautan <https://s.id/kalk-matahari>. Peserta didik juga dapat mengaksesnya dengan memindai kode respons cepat pada Buku Siswa. Tampilan awal media pembelajaran tersebut adalah sebagai berikut.



Melalui media tersebut, mintalah peserta didik untuk mengamati kapan matahari terbit dan terbenam untuk beberapa kota setiap hari/bulannya. Ajukan pertanyaan, apakah waktu terbit dan terbenamnya matahari tersebut juga dapat dimodelkan dengan fungsi trigonometri.

5. Mintalah peserta didik untuk membagikan hasil pekerjaannya melalui media sosial dengan tagar #ProyekTrigonometri dan #KalkulatorMatahari. Informasikan juga rubrik yang Bapak/Ibu Guru gunakan kepada peserta didik agar mereka mengetahui ekspektasi Bapak/Ibu terhadap hasil pekerjaan mereka. Contoh rubriknya dapat ditemukan pada bagian Asesmen Sumatif.

I. Refleksi

Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan fitur Refleksi dalam Buku Siswa untuk mengajak peserta didik melakukan refleksi pada setiap akhir pembelajaran bab. Bapak/Ibu juga dapat menyalin fitur tersebut untuk diisi oleh peserta didik dan dikumpulkan kembali ke Bapak/Ibu. Dengan cara seperti ini, Bapak/Ibu dapat menganalisis refleksi peserta didik dan menggunakannya untuk memperbaiki praktik pembelajaran berikutnya.

Bapak/Ibu juga perlu melakukan refleksi terhadap pembelajaran fungsi trigonometri yang telah dilakukan. Terdapat banyak cara melakukannya. Salah satunya ialah dengan mengikuti panduan refleksi berikut.

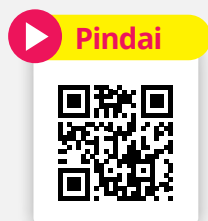
Tabel 3.5 Panduan Refleksi Pembelajaran Fungsi Trigonometri

No.	Panduan Refleksi
1.	Deskripsikan pengalaman Bapak/Ibu Guru dalam mengajarkan Fungsi Trigonometri.
2.	Deskripsikan perasaan dominan Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Fungsi Trigonometri.
3.	Evaluasilah pengalaman Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Fungsi Trigonometri.
4.	Apa saja pelajaran berharga yang telah dipetik Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Fungsi Trigonometri?
5.	Bagaimana rencana Bapak/Ibu Guru untuk menindaklanjuti pelajaran-pelajaran berharga tersebut?

J. Sumber Belajar

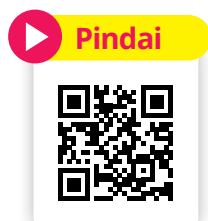
Sumber belajar utama bagi peserta didik adalah Buku Siswa. Selain itu, Bapak/Ibu Guru juga dapat memilihkan sumber-sumber belajar lain yang relevan dengan tujuan pembelajaran dalam bab “Fungsi Trigonometri” ini. Beberapa sumber belajar tersebut adalah sebagai berikut.

Sumber belajar ini merupakan daftar putar video-video pembelajaran tentang fungsi trigonometri.



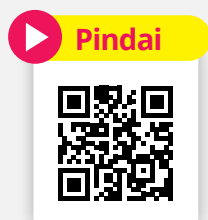
<https://s.id/vid-trig>

Artikel ini membahas grafik fungsi sinus dan fungsi kosinus yang dibumbui dengan animasi bagaimana terbentuknya grafik kedua fungsi tersebut.



<https://s.id/gif-sin-cos>

Artikel ini mengilustrasikan bagaimana grafik fungsi tangen terbentuk dengan menyuguhkan animasinya.



<https://s.id/gif-tan>

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2024

Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut (Edisi Revisi)
untuk SMA Kelas XI

Penulis: Yosep Dwi Kristanto, Muhammad Taqiyuddin, Al Azhary Masta, Elyda Yulfiana
ISBN: 978-623-388-339-9

Panduan Khusus

Bab 4 VEKTOR



Sumber: donoem (2013)

Sumber: Cbuske46, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (2018)

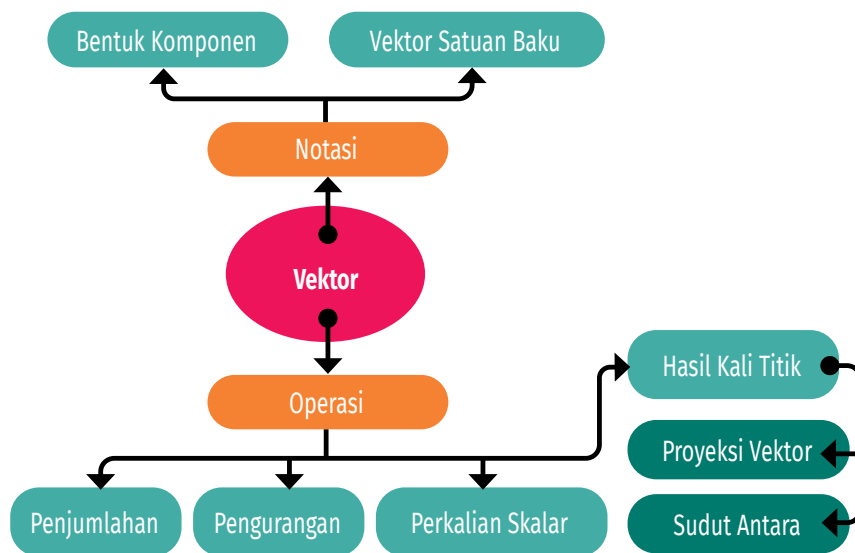
A. Pendahuluan

1. Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat memahami konsep vektor dan notasi vektor, melakukan operasi aljabar pada vektor, menentukan hasil kali titik, serta mengaplikasikan materi vektor dalam pembuktian geometri.

Bapak/Ibu Guru dapat menentukan kriteria ketercapaian tujuan pembelajaran (KKTP) Bab 4 dengan mengacu pada kolom Tujuan Pembelajaran dalam **Tabel 3** Pemetaan Capaian Pembelajaran dan Tujuan Pembelajaran pada bagian “Panduan Umum”.

2. Peta Materi



Gambar 4.1 Peta Materi Bab 4 Buku Siswa

3. Saran Durasi Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran bab “Vektor” ini dapat dilaksanakan dalam 25 jam pelajaran (JP) dengan 1 JP = 45 menit. Bapak/Ibu Guru dapat menyesuaikan durasi pembelajaran sesuai dengan kondisi satuan pendidikan tempat mengajar.

B. Materi Prasyarat

Beberapa materi prasyarat berkaitan dengan bab ini meliputi bidang Kartesius, operasi dasar aljabar, trigonometri, pembuktian, dan bangun datar. Pemahaman tentang bidang Kartesius penting dikuasai peserta didik untuk mempelajari notasi vektor dan komponennya. Materi tentang operasi dasar aljabar diperlukan untuk menguasai materi operasi-operasi pada vektor. Peserta didik juga perlu memahami materi trigonometri yang terdapat pada Bab 3 untuk mempelajari materi hasil kali titik, sudut antara dua vektor, dan proyeksi vektor. Untuk mempelajari materi pembuktian geometri pada subbab terakhir, peserta didik perlu memahami properti beberapa bangun datar, seperti jajargenjang, trapesium, dan belah ketupat. Selain itu, pemahaman dasar terkait membuat deduksi pembuktian juga diperlukan.

C. Apersepsi

Bapak/Ibu Guru dapat mengawali pembelajaran vektor dengan menarik perhatian peserta didik. Bapak/Ibu Guru dapat mengajukan pertanyaan, “Apakah mungkin seseorang berlayar melawan arah angin?” Tentu saja pelayar tidak akan bisa mengarahkan kapalnya secara langsung ke arah datangnya angin. Bapak/Ibu Guru dapat menjelaskan bahwa dengan visualisasi vektor, peserta didik dapat menggambarkan arah dan kecepatan angin seperti pada visualisasi prakiraan cuaca yang melibatkan angin. Gambar arah dan kecepatan angin ini akan bermanfaat bagi pelayar.

Materi vektor hasil kali titik pada Subbab B juga biasanya diterapkan dalam ilmu fisika, yaitu untuk menentukan usaha. Dengan demikian, penerapannya dalam bidang fisika tersebut dapat dijadikan sebagai pintu masuk untuk menarik perhatian peserta didik. Bapak/Ibu Guru dapat mengenalkan kearifan lokal yang berasal dari Kabupaten Tanah Datar, Sumatra Barat, yaitu Pacu Jawi. Gunakan video atau media lainnya dalam mengenalkan kearifan lokal tersebut agar peserta didik lebih tertarik dan dapat membayangkannya.

Pendidikan karakter melalui cerita Pacu Jawi tersebut dapat dikembangkan, misalnya dengan menyampaikan bahwa peserta didik sebaiknya terus melestarikan dan mengembangkan budayanya.

Selain itu, tekankan tentang kriteria penilaian dalam perlombaan tersebut. Salah satu kriterianya adalah kemampuan sapi untuk berlari lurus. Kriteria ini mengajarkan filosofi bahwa mengikuti jalan lurus merupakan hal yang sangat dihargai. Setelah itu, jelaskan keterkaitan cerita ini dengan topik hasil kali titik vektor. Dengan hasil kali titik, usaha sapi untuk menarik joki dan alat bajak dalam perlombaan tersebut dapat ditentukan.

D. Penilaian sebelum Pembelajaran

Bapak/Ibu Guru dapat melakukan tes diagnostik untuk mengidentifikasi kemampuan peserta didik terkait materi vektor. Seberapa jauh pengetahuan dan kelemahan peserta didik terhadap materi tersebut dapat digunakan sebagai input yang berharga untuk merencanakan pembelajaran. Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan materi berikut sebagai materi tes diagnostik.

1. Bidang Kartesius
2. Operasi dasar aljabar
3. Trigonometri
4. Bangun datar

E. Panduan Pembelajaran Buku Siswa

Subbab A: Vektor pada Bidang

Aktivitas 1

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat memahami pengertian dan notasi vektor serta melakukan operasi-operasi vektor, kemudian memaknai hasilnya secara geometris.

Untuk mengawali aktivitas ini, Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik untuk mencermati narasi pada awal bab dan memahami mengapa notasi vektor diperlukan, misalnya untuk merepresentasikan besar kecepatan dan arah dalam berlayar. Setelah itu, mintalah peserta

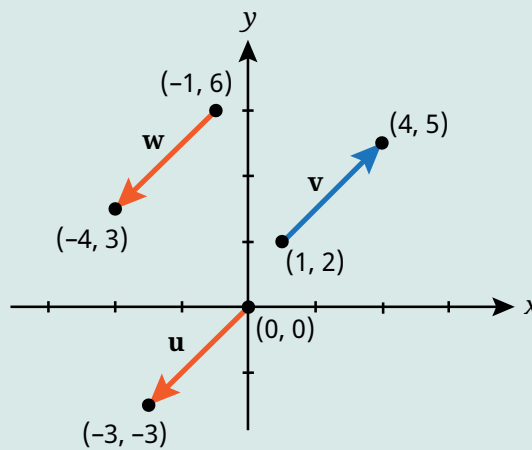
didik untuk menyimak Contoh 4.1 untuk memahami arti dua vektor yang ekuivalen, yakni dua vektor yang memiliki arah dan panjang sama. Selanjutnya, arahkan peserta didik untuk menyelesaikan Mari Mencoba 4.1.



Mari Mencoba 4.1

Alternatif Penyelesaian

Vektor-vektor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ ditunjukkan pada gambar di bawah ini.



Gambar 4.2 Vektor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$

Langkah pertama adalah menentukan gradien setiap vektor.

$$\text{Gradien } \mathbf{u} = \frac{-3 - 0}{-3 - 0} = 1$$

$$\text{Gradien } \mathbf{v} = \frac{5 - 2}{4 - 1} = 1$$

$$\text{Gradien } \mathbf{w} = \frac{3 - 6}{-4 - (-1)} = 1$$

Meskipun gradien semua vektor tersebut sama dengan 1, vektor $\mathbf{u}$ dan vektor $\mathbf{w}$ mengarah ke kiri bawah, sedangkan vektor $\mathbf{v}$ mengarah ke kanan atas. Dengan demikian, $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{w}$ merupakan dua vektor yang masih mungkin ekuivalen. Panjang kedua vektor tersebut dapat ditentukan dengan menggunakan jarak antara titik-titik pangkal dan ujungnya.

$$\text{Panjang vektor } \mathbf{u} = \sqrt{(-3-0)^2 + (-3-0)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Panjang vektor } \mathbf{w} = \sqrt{(-4-(-1))^2 + (3-6)^2} = 3\sqrt{2}$$

Vektor $\mathbf{u}$ dan vektor $\mathbf{w}$ juga memiliki panjang sama. Dengan demikian, kedua vektor tersebut ekuivalen.

Ajaklah peserta didik untuk memahami notasi dan komponen dari suatu vektor dengan memperhatikan Definisi 4.1. Untuk rumus umum panjang vektor yang sebelumnya sudah disinggung pada Contoh 4.1 dan Mari Mencoba 4.1, dapat diperhatikan pada Rumus 4.1.

Selanjutnya, untuk mempersiapkan peserta didik mempelajari sifat-sifat operasi vektor, ajak mereka untuk memperhatikan Contoh 4.2 sebagai pengantar penjumlahan vektor dan Contoh 4.3 sebagai pengantar perkalian vektor dengan skalar. Setelahnya, Bapak/Ibu Guru dapat menugaskan peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 4.2 dan 4.3.



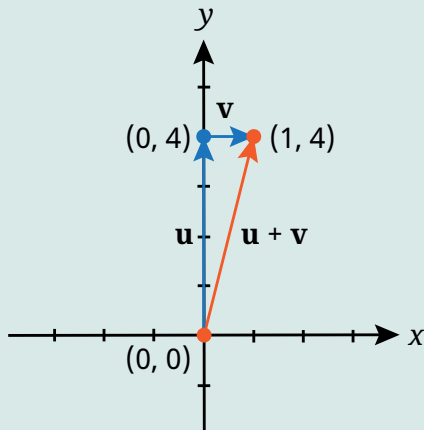
Mari Mencoba 4.2

Alternatif Penyelesaian

Penyelesaian permasalahan ini dibagi menjadi beberapa kasus berikut.

Kasus 1: Kecepatan Perahu Menjadi Dua Kali Lipat

Karena mula-mula kecepatan perahu adalah 2 m/s, kecepatannya sekarang menjadi 4 m/s. Kecepatan ini dapat dimodelkan menjadi vektor $\mathbf{u} = \langle 0, 4 \rangle$. Sungai mengalir ke arah sumbu- x positif dengan kecepatan 1 m/s sehingga vektor yang bersesuaian dengan kecepatan aliran sungai ini adalah $\mathbf{v} = \langle 1, 0 \rangle$. Kombinasi antara kedua vektor merupakan suatu vektor yang memiliki pangkal di $(0, 0)$ dan ujung di $(1, 4)$ seperti pada gambar berikut.



Gambar 4.3 Sketsa Perjalanan Perahu

Bentuk komponen vektor kecepatan perahu setelah dipengaruhi oleh vektor aliran sungai adalah

$$\langle 1 - 0, 4 - 0 \rangle = \langle 1, 4 \rangle$$

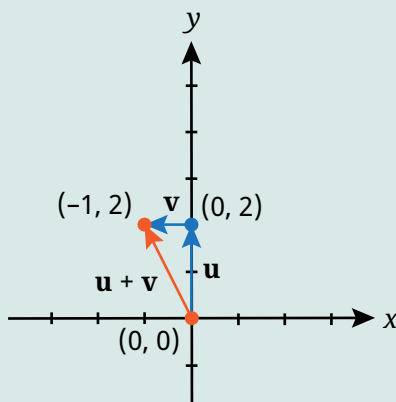
Besar vektor tersebut adalah

$$\sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} \approx 4,12$$

Dengan demikian, kecepatan perahu tersebut menjadi 4,12 m/s.

Kasus 2: Arah Arus Sungai Berlawanan

Kasus ini hampir sama dengan permasalahan pada Contoh 4.2, tetapi arus sungainya berlawanan. Ilustrasi kasus ini diperlihatkan pada gambar berikut.



Gambar 4.4 Ilustrasi Kasus 2

Dengan demikian, vektor kecepatan perahu setelah dipengaruhi oleh arus sungai menjadi

$$\langle -1 - 0, 2 - 0 \rangle = \langle -1, 2 \rangle$$

Besar vektor ini adalah

$$\sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2,24$$

Jadi, kecepatan perahu setelah dipengaruhi oleh arus sungai adalah 2,24 m/s.



Mari Mencoba 4.3

Alternatif Penyelesaian

$$3\mathbf{a} = 3\langle -2, -4 \rangle = \langle 3(-2), 3(-4) \rangle = \langle -6, -12 \rangle$$

$$2\mathbf{b} = 2\langle -8, 6 \rangle = \langle 2(-8), 2(6) \rangle = \langle -16, 12 \rangle$$

$$3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = \langle -6, -12 \rangle - \langle -16, 12 \rangle = \langle 10, -24 \rangle$$

$$\|3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}\| = \sqrt{10^2 + (-24)^2} = 26$$

Selanjutnya, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan fitur Eksplorasi untuk mengajarkan berbagai operasi pada vektor.



Eksplorasi

Bagaimana Sifat-Sifat Operasi Vektor?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Tiga vektor: $\mathbf{u} = \langle 1, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -2 \rangle$, dan $\mathbf{w} = \langle -2, 3 \rangle$

Dua skalar: $c = -4$ dan $d = 7$

1. a. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 1 + 3, -1 + (-2) \rangle = \langle 4, -3 \rangle$

b. $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \langle 3 + 1, -2 + (-1) \rangle = \langle 4, -3 \rangle$

Berdasarkan perhitungan, diperoleh bahwa $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

$$2. \quad \text{a. } (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \langle 4, -3 \rangle + \langle -2, 3 \rangle = \langle 2, 0 \rangle$$

$$\text{b. } \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \langle 1, -1 \rangle + \langle 1, 1 \rangle = \langle 2, 0 \rangle$$

Dari hasil tersebut, diperoleh bahwa $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

$$3. \quad \mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle \text{ maka } \mathbf{v} + \mathbf{0} = \langle 3, -2 \rangle + \langle 0, 0 \rangle = \langle 3, -2 \rangle = \mathbf{v}$$

Penjumlahan suatu vektor dengan vektor nol menghasilkan vektor itu sendiri, yaitu $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$.

$$4. \quad \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \langle 3, -2 \rangle + \langle -3, 2 \rangle = \langle 3 + (-3), -2 + 2 \rangle = \langle 0, 0 \rangle = \mathbf{0}$$

Penjumlahan suatu vektor dengan negatifnya menghasilkan vektor nol.

$$5. \quad c(d\mathbf{v}) = -4\langle 7(3), 7(-2) \rangle$$

$$= -4\langle 21, -14 \rangle$$

$$= \langle -4(21), -4(-14) \rangle$$

$$= \langle -84, 56 \rangle$$

$$(cd)\mathbf{v} = (-4 \cdot 7)\langle 3, -2 \rangle$$

$$= -28\langle 3, -2 \rangle$$

$$= \langle -28(3), -28(-2) \rangle$$

$$= \langle -84, 56 \rangle$$

Berdasarkan perhitungan, diperoleh bahwa $c(d\mathbf{v}) = (cd)\mathbf{v}$.

$$6. \quad \text{a. } (c + d)\mathbf{v} = (-4 + 7)\langle 3, -2 \rangle$$

$$= 3\langle 3, -2 \rangle$$

$$= \langle 3(3), 3(-2) \rangle$$

$$= \langle 9, -6 \rangle$$

$$\text{b. } c\mathbf{v} + d\mathbf{v} = -4\langle 3, -2 \rangle + 7\langle 3, -2 \rangle$$

$$= \langle -4(3), -4(-2) \rangle + \langle 7(3), 7(-2) \rangle$$

$$= \langle -12, 8 \rangle + \langle 21, -14 \rangle$$

$$= \langle 9, -6 \rangle$$

Berdasarkan perhitungan, diperoleh bahwa $(c + d)\mathbf{v} = c\mathbf{v} + d\mathbf{v}$.

$$\begin{aligned}
 7. \quad a. \quad c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= -4\langle 4, -3 \rangle \\
 &= \langle -4(4), -4(-3) \rangle \\
 &= \langle -16, 12 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b. \quad c\mathbf{u} + c\mathbf{v} &= -4\langle 1, -1 \rangle + -4\langle 3, -2 \rangle \\
 &= \langle -4(1), -4(-1) \rangle + \langle -4(3), -4(-2) \rangle \\
 &= \langle -4, 4 \rangle + \langle -12, 8 \rangle \\
 &= \langle -16, 12 \rangle
 \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan, diperoleh bahwa $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$.

$$8. \quad a. \quad 1(\mathbf{v}) = \langle 1(3), 1(-2) \rangle = \langle 3, -2 \rangle = \mathbf{v}$$

$$b. \quad 0(\mathbf{v}) = \langle 0(3), 0(-2) \rangle = \langle 0, 0 \rangle = \mathbf{0}$$

Perkalian suatu vektor dengan skalar 1 menghasilkan vektor itu sendiri, sedangkan perkalian suatu vektor dengan skalar 0 menghasilkan vektor nol.

Selanjutnya, untuk menguatkan pemahaman peserta didik tentang sifat-sifat operasi pada vektor, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan Contoh 4.4, Contoh 4.5, dan Mari Mencoba yang terkait.



Mari Mencoba 4.4

Alternatif Penyelesaian

Persamaan yang diberikan akan dibuktikan berlaku untuk sembarang vektor $\mathbf{v}$.

$$2\mathbf{v} - \frac{1}{3}(3\mathbf{v}) = 2\mathbf{v} - 1\mathbf{v} = (2 - 1)\mathbf{v} = 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

Jadi, terbukti bahwa $2\mathbf{v} - \frac{1}{3}(3\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ untuk sembarang vektor $\mathbf{v}$.



Mari Mencoba 4.5

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ adalah sembarang vektor dan c adalah sembarang skalar, maka

$$\begin{aligned}\|\mathbf{c}\mathbf{v}\| &= \|c\langle v_1, v_2 \rangle\| \\ &= \|\langle cv_1, cv_2 \rangle\| \\ &= \sqrt{(cv_1)^2 + (cv_2)^2} \\ &= \sqrt{c^2 v_1^2 + c^2 v_2^2} \\ &= \sqrt{c^2 (v_1^2 + v_2^2)} \\ &= \sqrt{c^2} \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)} \\ &= |c| \|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\|\mathbf{c}\mathbf{v}\| = |c| \|\mathbf{v}\|$.

Aktivitas 2

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menuliskan sebuah vektor sebagai kombinasi vektor-vektor satuan.

Bapak/Ibu Guru dapat memulai Aktivitas 2 dengan memberikan penjelasan kepada peserta didik mengapa vektor satuan dibutuhkan sesuai dengan pemaparan pada Buku Siswa. Selanjutnya, peserta didik diarahkan untuk memperhatikan Contoh 4.6, kemudian mengerjakan Mari Mencoba 4.6.



Mari Mencoba 4.6

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ adalah sembarang vektor tak nol dimensi dua dan $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}$.

Karena $\mathbf{u}$ hasil perkalian $\mathbf{v}$ dengan skalar positif $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}$, maka $\mathbf{u}$ sejajar dan searah dengan $\mathbf{v}$. Panjang vektor $\mathbf{u}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \left\| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \langle v_1, v_2 \rangle \right\| \\ &= \left\| \left\langle \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right\rangle \right\| \\ &= \sqrt{\left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right)^2 + \left(\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}} = \sqrt{1} = 1\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\mathbf{u}$ memiliki panjang 1 satuan dan searah dengan $\mathbf{v}$.

Berdasarkan pengalaman belajar di atas, ajaklah peserta didik untuk memahami Rumus 4.2 sebagai rumus umum untuk menormalisasi sebuah vektor. Selain memberi peserta didik pengalaman belajar untuk menemukan vektor satuan, informasikan bahwa ada juga notasi vektor yang memanfaatkan vektor satuan khusus dengan menyimak Rumus 4.3. Untuk memahami lebih lanjut penulisan vektor dalam vektor satuan baku, Bapak/Ibu Guru mengajak peserta didik untuk memperhatikan Contoh 4.7, kemudian mengerjakan Mari Mencoba 4.7.



Mari Mencoba 4.7

Alternatif Penyelesaian

Vektor $\mathbf{a} = \langle -4, 3 \rangle$ dan vektor $\mathbf{b} = \langle 2, -3 \rangle$ dapat dituliskan dalam bentuk vektor satuan baku berikut.

$$\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

$$\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + 2\mathbf{b} &= (-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + 2(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) \\ &= -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} \\ &= -3\mathbf{j}\end{aligned}$$

Subbab B: Hasil Kali Titik

Aktivitas 3

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat melakukan operasi hasil kali titik dan menggunakan sifat-sifat operasi hasil kali titik antara dua vektor.

Bapak/Ibu Guru dapat memberikan penjelasan kepada peserta didik mengenai definisi hasil kali titik. Bapak/Ibu Guru dapat menugaskan peserta didik mencermati Contoh 4.8, kemudian mengerjakan Mari Mencoba 4.8. Mintalah satu atau dua peserta didik untuk mempresentasikan jawabannya.



Mari Mencoba 4.8

Alternatif Penyelesaian

- $\langle -3, -4 \rangle \cdot \langle 5, 2 \rangle = -3(5) + (-4)(2)$
 $= -15 - 8 = -23$
- $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot (-2\mathbf{i} - 1\mathbf{j}) = 1(-2) + 2(-1)$
 $= -2 - 2 = -4$

Bapak/Ibu Guru membagi semua peserta didik ke dalam kelompok-kelompok kecil yang memungkinkan mereka dapat belajar secara efektif dan efisien. Beri tahu bahwa mereka akan menemukan sifat-sifat hasil kali titik. Setelah itu, mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi saat mengerjakan Eksplorasi. Bapak/Ibu Guru memastikan setiap anggota kelompok dapat bekerja sama. Pembentukan kelompok dapat dilakukan untuk aktivitas-aktivitas selanjutnya pada subbab ini.



Menemukan Sifat-Sifat Hasil Kali Titik

Alternatif Penyelesaian

Diberikan tiga vektor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ berikut.

$$\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle, \mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle, \text{ dan } \mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$$

$$1. \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1 v_1 + v_2 v_2$$

$$= v_1^2 + v_2^2$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

Karena $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$, maka $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

$$2. \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Karena nilai $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, maka hasil kali titik bersifat komutatif.

$$3. \quad \text{a. } \mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2 \rangle$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2)$$

$$\text{b. } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_1 w_1 + u_2 w_2$$

$$= u_1 v_1 + u_1 w_1 + u_2 v_2 + u_2 w_2$$

$$= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2)$$

Karena $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, maka hasil kali titik bersifat distributif.

4. Misalkan c adalah skalar.

$$\text{a. } c\mathbf{u} = \langle cu_1, cu_2 \rangle$$

$$(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = cu_1 v_1 + cu_2 v_2$$

$$\text{b. } c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = c(u_1 v_1 + u_2 v_2) = cu_1 v_1 + cu_2 v_2$$

$$\text{c. } c\mathbf{v} = \langle cv_1, cv_2 \rangle$$

$$\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = cu_1 v_1 + cu_2 v_2$$

Jadi, $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$.

5. Vektor nol pada bidang adalah $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$.

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0v_1 + 0v_2 = 0$$

Jadi, $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Bapak/Ibu Guru meminta beberapa kelompok untuk berbagi hasil diskusinya, kemudian memberi kesempatan kepada peserta didik lain untuk menanggapi jawaban dari kelompok presenter. Pandulah diskusi ini agar Bapak/Ibu Guru dapat menyimpulkan pengetahuan mereka tentang sifat-sifat hasil kali titik. Gunakan Sifat 4.3 untuk memberikan penegasan terhadap simpulan peserta didik.

Aktivitas 4

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menentukan besar sudut antara dua vektor menggunakan hasil kali titik dan memahami vektor ortogonal.

Bapak/Ibu Guru mengajak setiap kelompok untuk berdiskusi saat mengerjakan Eksplorasi.



Eksplorasi

Sudut antara Dua Vektor

Alternatif Penyelesaian

1. Dengan menggunakan Aturan Kosinus, kuadrat panjang vektor $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ adalah sebagai berikut.

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

2. Dengan menggunakan Sifat 4.3 pertama dan ketiga, maka

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

3. Rumus pada langkah kedua dinyatakan dalam $\cos \theta$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \\ -2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= -2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \end{aligned}$$

Pandulah diskusi ini agar dapat menemukan rumus sudut antara dua vektor. Gunakan Rumus 4.4 untuk memberi penegasan terhadap hasil diskusi peserta didik. Selanjutnya, Bapak/Ibu Guru meminta peserta didik untuk mengamati kemungkinan sudut-sudut antara dua vektor pada Gambar 4.18 di Buku Siswa. Untuk menerapkan pemahaman peserta didik, mintalah mereka mengerjakan Mari Mencoba 4.9 yang bersesuaian dengan Contoh 4.9.



Mari Mencoba 4.9

Alternatif Penyelesaian

Diketahui: $\mathbf{u} = \langle -3, 1 \rangle$ dan $\mathbf{v} = \langle 2, -4 \rangle$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{-3(2) + 1(-4)}{\sqrt{10}(2\sqrt{5})} = \frac{-10}{10\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Dengan demikian, $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 135^\circ$.

Dengan menggunakan Rumus 4.5, peserta didik dapat menyatakan rumus hasil kali titik antara dua vektor ke dalam besar sudut dan panjang vektor-vektor, kemudian mengerjakan Mari Mencoba 4.10 yang bersesuaian dengan Contoh 4.10.



Mari Mencoba 4.10

Alternatif Penyelesaian

$$\|\mathbf{a}\| = 5 \text{ dan } \|\mathbf{b}\| = 4$$

Maka

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta \\ &= 5(4) \cos 30^\circ \\ &= 20\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\ &= 10\sqrt{3}\end{aligned}$$

Jadi, nilai $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ adalah $10\sqrt{3}$.

Dengan menggunakan Contoh 4.9, Bapak/Ibu Guru dapat menjelaskan hubungan hasil kali titik dan sudut yang terbentuk dari dua vektor. Selanjutnya, ajaklah peserta didik untuk memahami vektor-vektor ortogonal. Gunakan soal Mari Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 4.11 dan Contoh 4.12 sebagai latihan.



Mari Mencoba 4.11

Alternatif Penyelesaian

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \text{ dan } \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(-2) + 2(3) = 4$$

Jadi, sudut yang terbentuk dari vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah sudut lancip.



Mari Mencoba 4.12

Alternatif Penyelesaian

$$\mathbf{u} = \langle -2, 6 \rangle \text{ dan } \mathbf{v} = \langle 9, m \rangle$$

Maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -2(9) + 6(m) = -18 + 6m$$

Karena vektor $\mathbf{u}$ ortogonal terhadap vektor $\mathbf{v}$, maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

$$-18 + 6m = 0$$

$$6m = 18$$

$$m = 3$$

Jadi, nilai m adalah 3.

Aktivitas 5

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menentukan proyeksi suatu vektor ke vektor lainnya, kemudian menentukan panjang vektor hasil proyeksinya.

Bapak/Ibu Guru dapat menjelaskan kepada peserta didik tentang penerapan vektor dalam ilmu fisika melalui fitur Matematika dan Sains “Vektor dan Gaya”. Setelah itu, Bapak/Ibu Guru dapat mengajak setiap kelompok untuk berdiskusi saat mengerjakan Eksplorasi.



Eksplorasi

Proyeksi Suatu Vektor terhadap Vektor Lain

Alternatif Penyelesaian

1. Dengan menggunakan definisi fungsi kosinus diperoleh

$$\cos \theta = \frac{\|\overrightarrow{PS}\|}{\|\overrightarrow{PR}\|}$$

$$\cos \theta = \frac{\|\overrightarrow{PS}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$\|\overrightarrow{PS}\| = \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

2. Dari **Rumus 4.5** diperoleh

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \leftrightarrow \|\mathbf{v}\| = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cos \theta}$$

Panjang vektor $\overrightarrow{PS}$ sehingga memuat $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{PS}\| &= \|\mathbf{v}\| \cos \theta \\ &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cos \theta} \cos \theta \\ &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|}\end{aligned}$$

Panjang vektor $\overrightarrow{PS}$ disebut juga proyeksi skalar dari vektor $\mathbf{v}$ terhadap vektor $\mathbf{u}$ dan dinotasikan $\text{komp}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ sehingga diperoleh $\text{komp}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|}$.

3. Vektor satuan yang searah dengan $\mathbf{u}$ adalah $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$.
4. Karena $\overrightarrow{PS}$ segaris dengan $\mathbf{u}$, maka vektor $\overrightarrow{PS}$ dapat diperoleh dengan mengalikan panjang vektor $\overrightarrow{PS}$ dengan vektor satuan $\mathbf{u}$.

$$\overrightarrow{PS} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|} \right) \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2} \right) \mathbf{u}$$

Vektor $\overrightarrow{PS}$ disebut juga proyeksi vektor $\mathbf{v}$ terhadap vektor $\mathbf{u}$ dan dinotasikan $\text{proy}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ sehingga diperoleh $\text{proy}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2} \right) \mathbf{u}$.

Bapak/Ibu Guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan jawabannya dan meminta peserta didik lainnya untuk menanggapi jawaban dari kelompok presenter. Gunakan Rumus 4.6 untuk memberikan penegasan terhadap simpulan peserta didik. Selanjutnya, Bapak/Ibu Guru menugaskan peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 4.13 yang bersesuaian dengan Contoh 4.13.



Mari Mencoba 4.13

Alternatif Penyelesaian

$$\mathbf{u} = \langle 4, 2 \rangle \text{ dan } \mathbf{v} = \langle 1, -1 \rangle$$

Kita menentukan panjang vektor $\mathbf{v}$ terlebih dahulu.

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Dengan demikian,

Proyeksi skalar $\mathbf{u}$ ke $\mathbf{v}$ adalah

$$\text{komp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{4(1) + 2(-1)}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Proyeksi vektor $\mathbf{u}$ ke $\mathbf{v}$ adalah

$$\text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right) \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \sqrt{2} \frac{\langle 1, -1 \rangle}{\sqrt{2}} = \langle 1, -1 \rangle$$

Untuk menerapkan pemahaman para peserta didik mengenai proyeksi vektor, Bapak/Ibu Guru dapat menugaskan mereka mengerjakan soal Mari Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 4.14 dan Contoh 4.15.



Mari Mencoba 4.14

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

$$\|\mathbf{F}\| = 10 \text{ N dan } \theta = \frac{\pi}{4}$$

1. Komponen vektor $\mathbf{F}$ di sepanjang sumbu-x adalah

$$\|\mathbf{F}\| \cos \theta = 10 \cos \frac{\pi}{4} = 10 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right) = 5\sqrt{2}$$

$$\text{Sudut antara } \mathbf{F} \text{ dan sumbu-y adalah } = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Komponen vektor $\mathbf{F}$ di sepanjang sumbu-y adalah

$$\|\mathbf{F}\| \cos \frac{\pi}{4} = 10 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right) = 5\sqrt{2}$$

2. Bentuk komponen-komponen vektor $\mathbf{F}$ adalah $\mathbf{F} = \langle 5\sqrt{2}, 5\sqrt{2} \rangle$.



Mari Mencoba 4.15

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

$$\mathbf{F} = \langle 12, 16 \rangle \text{ dan perpindahan } \mathbf{D} = \langle 25, 0 \rangle$$

Maka

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = (12)(25) + (16)(0) = 300$$

Jadi, usaha yang dilakukan gaya tersebut adalah 300 J.

Subbab C: Pembuktian Geometris

Aktivitas 6

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat membuktikan beberapa teorema geometris menggunakan konsep vektor.

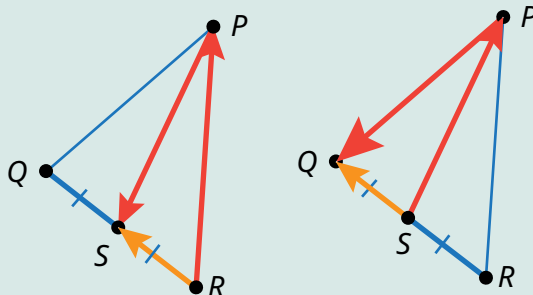
Untuk memulai aktivitas ini, Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik untuk mengingat kembali jenis-jenis bangun datar dan beberapa sifatnya. Misalnya dengan memberikan pertanyaan, “Manakah yang benar? Persegi panjang termasuk jajargenjang atau jajargenjang termasuk persegi panjang?”

Setelah itu, peserta didik diajak untuk memperhatikan Contoh 4.16 untuk mencermati pembuktian sifat pada segitiga dengan menggunakan vektor, kemudian mengerjakan Mari Mencoba 4.16.



Mari Mencoba 4.16

Alternatif Penyelesaian

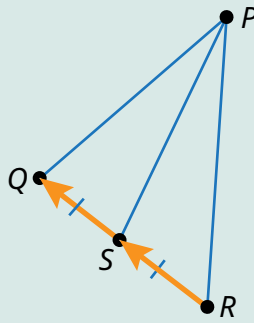


Gambar 4.5 Segitiga PQR

Dari gambar di atas ditemukan dua persamaan berikut.

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PR} \quad \dots (1)$$

$$\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PS} \quad \dots (2)$$



Gambar 4.6 Segitiga PQR

Selanjutnya, berdasarkan gambar di atas diperoleh $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{SQ}$. Dari persamaan (1) dan (2), kita memiliki

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PS} \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{PS} &= \frac{\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ}}{2}\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ})$.

Aktivitas dilanjutkan dengan mencermati Contoh 4.17 yang berfokus pada pembuktian geometris pada jajargenjang. Berikutnya, kegiatan Mari Mencoba 4.17 mengajak peserta didik untuk menganalisis pembahasan awal, yakni bahwa persegi panjang itu termasuk jajargenjang. Sifat ini yang akan digunakan untuk membuktikan soal pada Mari Mencoba.



Mari Mencoba 4.17

Alternatif Penyelesaian

Karena persegi panjang termasuk jajargenjang, semua sifat yang berlaku pada jajargenjang akan berlaku pada persegi panjang (tidak berlaku sebaliknya). Kita sudah membuktikan sifat jajargenjang pada Contoh 4.17. Dengan demikian, kedua diagonal dari persegi panjang saling membagi dua sama panjang adalah akibat dari kedua diagonal dari jajargenjang saling membagi dua sama panjang.

Kegiatan terakhir ialah dengan mengerjakan Eksplorasi yang mengajak peserta didik untuk membuktikan teorema Pythagoras dengan menggunakan pendekatan vektor.



Eksplorasi

Membuktikan Teorema Pythagoras dengan Vektor

Alternatif Penyelesaian

$$1. \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$2. \quad \text{a.} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\text{b.} \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Dapat disimpulkan bahwa kedua vektor saling tegak lurus.

$$\begin{aligned} 3. \quad AC^2 &= \|\overrightarrow{AC}\|^2 \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 0 + 0 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 \\ &= AB^2 + BC^2 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

F. Tindak Lanjut

Sebagai pengayaan, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik mengerjakan kegiatan pada Mari Berpikir Kritis, Aktivitas Interaktif, dan Matematika dan Budaya. Lebih penting lagi, jika ada peserta didik yang ingin belajar lebih lanjut, cermati bagian pengayaan pada Buku Siswa yang salah satunya memberikan pengalaman belajar terkait vektor dalam ruang atau dimensi tiga.

G. Asesmen Sumatif

Terdapat dua bagian dalam Buku Siswa yang dapat digunakan sebagai asesmen sumatif, yaitu Uji Kompetensi dan Proyek. Bapak/Ibu Guru dapat mendesain rubrik penilaian secara mandiri dan sesuai dengan kebutuhan. Dalam mendesain rubrik tersebut, Bapak/Ibu Guru dapat mengacu pada bagian Kunci Jawaban.

H. Kunci Jawaban

1. Latihan A Vektor pada Bidang

Alternatif Penyelesaian

1. Salah
2. Benar
3. Salah
4. $\langle -4, 12 \rangle = -4\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$
5. $\mathbf{v} = \langle 1 - 6, -5 - 2 \rangle = \langle -5, -7 \rangle$; $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2} = \sqrt{74}$
6. Kecepatan pesawat terbang tersebut adalah $\sqrt{96.400 + 24.000\sqrt{2}} \approx 361,028$ km/jam, sedangkan arahnya adalah $170,985^\circ$.
7. $\langle 80, 0 \rangle + \langle 0, 50 \rangle = \langle 80, 50 \rangle$. Besar resultan gaya adalah $10\sqrt{89}$.
8. Diketahui $\mathbf{u} = (\cos \theta)\mathbf{i} - (\sin \theta)\mathbf{j}$ dan $\mathbf{v} = (\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j}$. Panjang kedua vektor ini adalah

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2} = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \sqrt{1} = 1$$

Karena $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ memiliki panjang 1, kedua vektor tersebut merupakan vektor-vektor satuan.

2. Latihan B Hasil Kali Titik

Alternatif Penyelesaian

1. Salah
2. Benar
3. $\theta = \arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$, dengan syarat vektor $\mathbf{u}$ dan vektor $\mathbf{v}$ bukan vektor nol.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Misalkan θ adalah sudut di antara $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$, maka

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{3(1) + 2(-3)}{\sqrt{3^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{130}}$$

Dengan demikian,

$$\theta = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{130}}\right)$$

Besar sudut θ ini adalah sekitar $105,255^\circ$.

4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta = (12)(18) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 108$
5. Misalkan θ adalah besar sudut di antara dua vektor tak nol $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$. Karena besar vektor $\mathbf{u}$ dan vektor $\mathbf{v}$ selalu positif dan $\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$, maka tanda $\cos \theta$ sama dengan tanda $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
 - a. Jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$, maka $\cos \theta < 0$. Jadi, θ merupakan sudut tumpul ($90^\circ < \theta < 180^\circ$).
 - b. Jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, maka $\cos \theta = 0$. Jadi, $\theta = 90^\circ$.
 - c. Jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$, maka $\cos \theta > 0$. Jadi, θ merupakan sudut lancip ($0 < \theta < 90^\circ$).
6. Nilai $\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}$ diperoleh dengan menjumlahkan hasil kali setiap komponennya.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{h} = 124(2.500) + 155(1.000) = 465.000$$

Nilai ini merupakan pendapatan kopsis setelah berhasil menjual buku tulis dan pensil selama seminggu.

7. $\text{proy}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \right) \mathbf{a} = \left(\frac{11(3) + (-2)(4)}{3^2 + 4^2} \right) \langle 3, 4 \rangle = \frac{25}{25} \langle 3, 4 \rangle = \langle 3, 4 \rangle$

8. Diketahui:

$$\|\mathbf{D}\| = 100 \text{ m ke utara}$$

$$\|\mathbf{F}\| = 500 \text{ N ke timur laut}$$

Besar sudut yang terbentuk antara utara dan timur laut adalah 45° sehingga

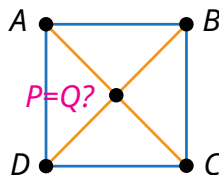
$$\begin{aligned} W &= \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{D}\| \cos 45^\circ \\ &= 500(100) \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right) \\ &= 25.000\sqrt{2} \\ &\approx 35.355 \end{aligned}$$

Jadi, usaha yang dilakukan angin adalah sekitar 35.355 J.

3. Latihan C Pembuktian Geometris

Alternatif Penyelesaian

1. Benar. $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = (-3) \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) = 0$
2. Benar jika layang-layangnya adalah persegi atau belah ketupat.
3. a. $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} - \overrightarrow{AL}$
b. $\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{AL})$
c. Berdasarkan a dan b, maka $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$.
d. Karena $\overrightarrow{KL}$ adalah kelipatan $\overrightarrow{BC}$, maka keduanya sejajar.
4. Diberikan sembarang persegi $ABCD$. Misalkan titik tengah AC adalah P dan titik tengah BD adalah Q . Kita akan menunjukkan bahwa kedua diagonal saling membagi dua sama panjang dengan membuktikan bahwa $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ}$.



Karena P titik tengah AC , maka

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \quad \dots (1)$$

Karena Q titik tengah BD , maka

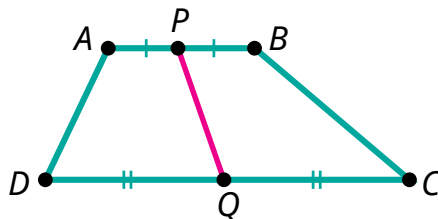
$$\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) \quad \dots (2)$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} \\ &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DQ} && \text{Karena } ABCD \text{ persegi, maka } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) && \text{Berdasarkan (2)} \\ &= \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} && \text{Karena } ABCD \text{ persegi, maka } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AP} && \text{Berdasarkan (1)} \end{aligned}$$

Sekarang, kita akan membuktikan bahwa $\overrightarrow{AC}$ dan $\overrightarrow{BD}$ saling tegak lurus. Pertama-tama, letakkan persegi pada bidang Kartesius (dengan transformasi yang tidak mengubah kekongruenan) sedemikian sehingga koordinat titik puncak persegi adalah $A(0, a)$, $B(a, a)$, $C(a, 0)$, dan $D(0, 0)$. Akibatnya, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ -a \end{pmatrix} = a \cdot (-a) + (-a) \cdot (-a) = 0$. Jadi, berdasarkan definisi Vektor-Vektor Ortogonal, $\overrightarrow{AC}$ dan $\overrightarrow{BD}$ saling tegak lurus.

5. Perhatikan bahwa pada trapesium $ABCD$ berlaku hubungan berikut:



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QD} \quad \dots (1)$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} \quad \dots (2)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} \quad \dots (3)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} \quad \dots (4)$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PA} \quad \dots (5)$$

$$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{QD} \quad \dots (6)$$

Akibatnya,

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QD}) + (\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC}) \quad (1) \text{ dan } (2)$$

$$= (\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AQ}) + (\overrightarrow{QD} + \overrightarrow{PC})$$

$$= (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}) + (\overrightarrow{QD} + \overrightarrow{PC}) \quad (5)$$

$$= \overrightarrow{PQ} + (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{QD}) \quad (3)$$

$$= \overrightarrow{PQ} + (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ}) \quad (6)$$

$$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} \quad (4)$$

$$= 2 \overrightarrow{PQ}$$

Jadi, terbukti bahwa $AD + BC = 2PQ$.

6. a. $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$

b. $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

c. Perhatikan bahwa

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$= -\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$= -\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} + \mathbf{0} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$= -\|\overrightarrow{OB}\|^2 + \|\overrightarrow{OC}\|^2$$

$$= -r^2 + r^2$$

$$= 0$$

Jadi, sudut ACB adalah sudut siku-siku.

4. Uji Kompetensi

Alternatif Penyelesaian

1. Salah

2. Salah

3. Bentuk komponen: $\overrightarrow{AB} = \langle 6, 7 \rangle$

Kombinasi vektor-vektor satuan: $\overrightarrow{AB} = 6\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

4. a. $-\frac{3}{4}\mathbf{v} = \frac{3}{4}\mathbf{i} - \frac{3}{4}\mathbf{j}$

b. $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$

c. $\mathbf{v} - 2\mathbf{u} = -7\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

5. a. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

b. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(6^2 + 5^2)} = \sqrt{61}$

6. a. $\left\langle \frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17} \right\rangle$

b. $\frac{2\sqrt{29}}{29}\mathbf{i} + \frac{5\sqrt{29}}{29}\mathbf{j}$

7. $108,4^\circ$

8. Proyeksi skalar $\mathbf{u}$ ke $\mathbf{v}$:

$$\text{komp}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{2 \times 3 + 1 \times 4}{5} = 2$$

Proyeksi vektor $\mathbf{u}$ ke $\mathbf{v}$:

$$\text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \right) \mathbf{v} = \frac{(2 \times 3 + 1 \times 4)}{(5)^2} \langle 3, 4 \rangle = \left\langle \frac{6}{5}, \frac{8}{5} \right\rangle$$

9. Kecepatan aliran sungai dapat dimodelkan dengan vektor $\mathbf{a} = \langle 5, 0 \rangle$, sedangkan kecepatan kapal dapat dimodelkan dengan vektor berikut.

$$\mathbf{b} = \langle 10 \cos 60^\circ, 10 \sin 60^\circ \rangle = \langle 5, 5\sqrt{3} \rangle$$

Resultan kedua vektor ini adalah

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 10, 5\sqrt{3} \rangle$$

Besar resultan kecepatan tersebut adalah

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \sqrt{10^2 + (5\sqrt{3})^2} = 5\sqrt{7} \approx 13,23$$

Besar sudut yang dibentuk oleh vektor resultan tersebut dengan garis horizontal adalah

$$\arctan \left(\frac{5\sqrt{3}}{10} \right) = 40,89^\circ$$

Jadi, kecepatan kapal adalah 13,23 m/s dengan arah $40,89^\circ$ terhadap garis horizontal.

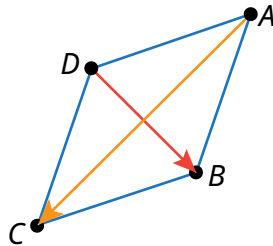
10. Besar vektor gaya tarikan anak terhadap garis horizontal adalah

$$\|F_x\| = 80 \cos 60^\circ = 40 \text{ N}$$

Dengan demikian, besarnya usaha yang dilakukan gaya tersebut setelah menarik gerobak sejauh 30 meter adalah

$$W = \|F_x\| \|D\| = 40(30) = 1.200 \text{ N}\cdot\text{m}$$

11. Bukti:



Perhatikan bahwa

- $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ maka $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- $AB = BC = CD = DA$

Kita dapat menuliskan:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BC} \cdot (-\overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2 = 0 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa kedua diagonal dari belah ketupat saling tegak lurus.

12. Misalkan θ , θ_1 , dan θ_2 secara berturut-turut merupakan sudut yang diapit oleh $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{w}$, serta $\mathbf{w}$ dan $\mathbf{v}$.

Jika $\mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u} + \|\mathbf{u}\|\mathbf{v}$, dapat ditunjukkan bahwa

$$\cos \theta_1 = \frac{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| (1 - \cos \theta)}{\|\mathbf{w}\|} = \cos \theta_2$$

Dengan demikian, $\theta_1 = \theta_2$.

Jadi, vektor $\mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u} + \|\mathbf{u}\|\mathbf{v}$ membagi sudut di antara vektor $\mathbf{u}$ dan vektor $\mathbf{v}$ menjadi dua bagian yang sama besar.

13. Diberikan vektor $\mathbf{u} = \langle \cos \alpha, \sin \alpha, 0 \rangle$ dan vektor $\mathbf{v} = \langle \cos \beta, \sin \beta, 0 \rangle$, dengan $\alpha > \beta$. Hasil kali titik kedua vektor ini adalah

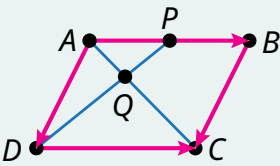
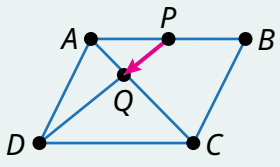
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

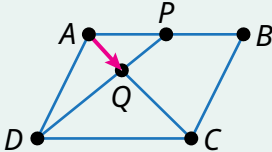
Karena kedua vektor ini terdapat pada bidang- xy , maka dapat ditunjukkan bahwa besar sudut di antara kedua vektor ini adalah $\alpha - \beta$. Dengan demikian, hasil kali titik antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ juga dapat ditentukan menggunakan cara berikut ini.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos (\alpha - \beta) \\ &= (\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha})(\sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta}) \cos (\alpha - \beta) \\ &= \cos (\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

14. Bukti:

	Misalkan $\mathbf{u} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ dan $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
	Karena P, Q, dan D segaris, maka terdapat $0 < x < 1$ sedemikian rupa sehingga $\overrightarrow{PQ} = x \cdot \overrightarrow{PD} = x \cdot \left(\mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{v} \right) = x \cdot \mathbf{u} - \frac{x}{2} \cdot \mathbf{v}$



Karena A, Q, dan C segaris, maka terdapat $0 < y < 1$ sedemikian rupa sehingga

$$\overrightarrow{AQ} = y \cdot \overrightarrow{AC} = y \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = y \cdot \mathbf{u} + y \cdot \mathbf{v} \dots (1)$$

Di lain pihak, $\overrightarrow{AQ}$ dapat ditulis menjadi

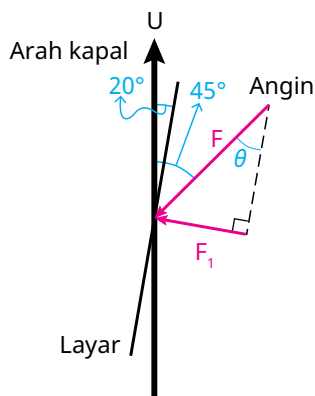
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\mathbf{v} + \left(x \cdot \mathbf{u} - \frac{x}{2} \cdot \mathbf{v}\right) \\ &= x \cdot \mathbf{u} + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right) \cdot \mathbf{v} \dots (2) \end{aligned}$$

Berdasarkan (1) dan (2), kita memiliki persamaan $y \cdot \mathbf{u} + y \cdot \mathbf{v} = x \cdot \mathbf{u} + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right) \cdot \mathbf{v}$. Akibatnya, kita memiliki sistem persamaan

$y = x$ dan $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$. Solusi dari sistem persamaan tersebut adalah $x = \frac{1}{3}$. Akibatnya, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Jadi, terbukti bahwa $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

5. Proyek: Berlayar Melawan Angin, Apakah Mungkin?

- Perhatikan gambar berikut!



Gaya yang disebabkan oleh angin (F) memiliki dua komponen terkait dengan layar kapal tersebut, yaitu gaya yang sejajar dan gaya yang tegak lurus dengan layar. Komponen gaya yang sejajar dengan layar tidak mendorong layar tersebut. Komponen gaya yang tegak lurus dengan layar adalah yang mendorong layar tersebut. Misalnya, komponen gaya ini adalah F_1 .

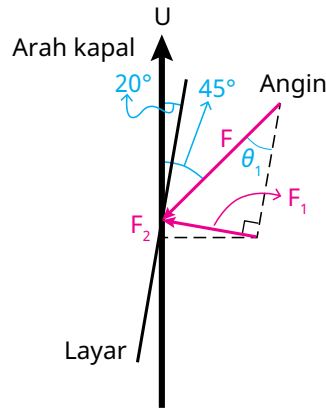
Karena θ_1 dan sudut yang dibentuk oleh $\mathbf{F}$ dan layar merupakan sudut-sudut dalam berseberangan, kita mendapatkan

$$\theta_1 = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$$

Dengan demikian, kita memperoleh bahwa besar gaya angin yang efektif mendorong layar tersebut adalah

$$\|\mathbf{F}_1\| = \|\mathbf{F}\| \sin \theta_1 = \|\mathbf{F}\| \sin 25^\circ$$

2. Perhatikan gambar berikut!



Dapat ditunjukkan bahwa sudut lancip yang dibentuk oleh $\mathbf{F}_1$ dan vektor arah kapal adalah

$$\theta_2 = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$

Dengan demikian, kita memperoleh bahwa besar gaya yang betul-betul mendorong kapal tersebut adalah

$$\|\mathbf{F}_2\| = \|\mathbf{F}_1\| \cos 70^\circ = \|\mathbf{F}\| \sin 25^\circ \cos 70^\circ \approx 0,1445 \|\mathbf{F}\|$$

Jadi, hanya sekitar 14,45% dari besar gaya angin yang betul-betul mendorong kapal tersebut.

3. Dengan cara yang serupa dengan nomor 1 dan 2, besar gaya tersebut adalah

$$\|\mathbf{F}\| \cos (90^\circ - \alpha) \sin (\beta - \alpha)$$

dengan $\mathbf{F}$ adalah gaya yang dihasilkan angin, sedangkan α dan β berturut-turut adalah besar sudut layar dan arah angin terhadap arah kapal (utara).

I. Refleksi

Bapak/Ibu Guru dapat melakukan refleksi pembelajaran setiap peserta didik pada setiap akhir bab menggunakan fitur Refleksi pada Buku Siswa. Bapak/Ibu Guru juga perlu melakukan refleksi terhadap pembelajaran yang telah dilakukan. Terdapat banyak cara melakukannya. Salah satunya adalah dengan mengikuti panduan refleksi berikut.

Tabel 4.1 Panduan Refleksi Pembelajaran Vektor

No.	Panduan Refleksi
1.	Deskripsikan pengalaman Bapak/Ibu Guru dalam mengajarkan Vektor.
2.	Deskripsikan perasaan dominan Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Vektor.
3.	Evaluasilah pengalaman Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Vektor.
4.	Apa saja pelajaran berharga yang telah dipetik Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Vektor?
5.	Bagaimana rencana Bapak/Ibu Guru untuk menindaklanjuti pelajaran-pelajaran berharga tersebut?

J. Sumber Belajar

Sumber belajar utama untuk mempelajari vektor adalah Buku Siswa.

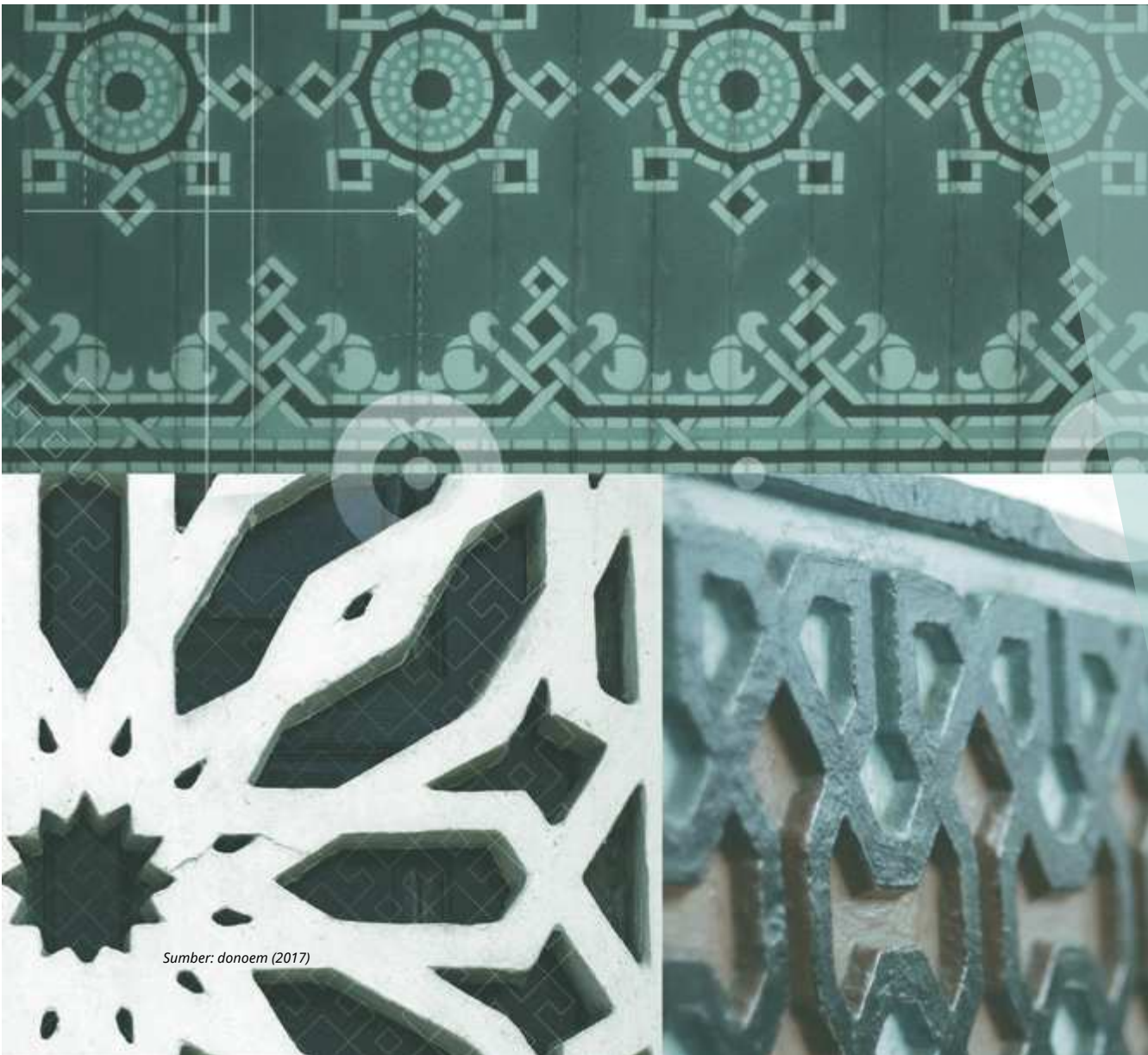
KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2024

Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut (Edisi Revisi)
untuk SMA Kelas XI

Penulis: Yosep Dwi Kristanto, Muhammad Taqiyuddin, Al Azhary Masta, Elyda Yulfiana
ISBN: 978-623-388-339-9

Panduan Khusus

Bab 5 TRANSFORMASI GEOMETRI



Sumber: donoem (2017)

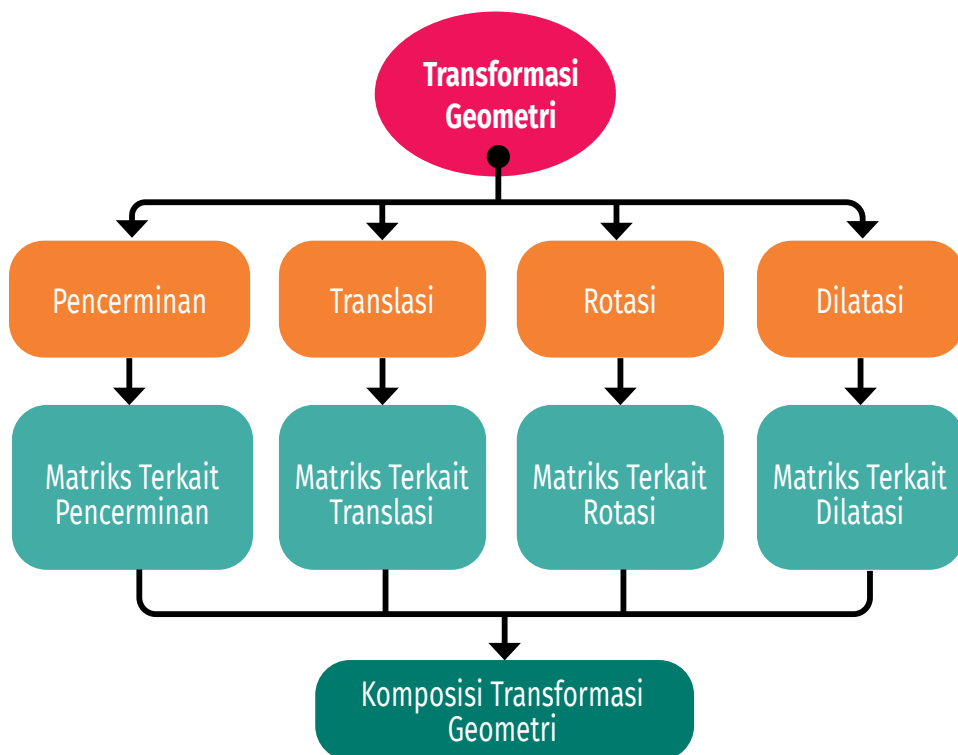
A. Pendahuluan

1. Tujuan Pembelajaran

Peserta didik diharapkan mampu menjelaskan pengertian pencerminan terhadap garis, translasi, rotasi, dan dilatasi. Peserta didik juga diharapkan mampu menentukan hasil peta dari berbagai proses transformasi tersebut beserta gabungannya dengan menggunakan matriks.

Bapak/Ibu Guru dapat menentukan kriteria ketercapaian tujuan pembelajaran (KKTP) Bab 5 dengan mengacu pada kolom Tujuan Pembelajaran dalam **Tabel 3** Pemetaan Capaian Pembelajaran dan Tujuan Pembelajaran pada bagian “Panduan Umum”.

2. Peta Materi



Gambar 5.1 Peta Materi Bab 5 Buku Siswa

3. Saran Durasi Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran bab “Transformasi Geometri” ini dapat dilaksanakan dalam 30 jam pelajaran (JP) dengan 1 JP = 45 menit. Bapak/Ibu Guru dapat menyesuaikan durasi pembelajaran sesuai dengan kondisi satuan pendidikan tempat mengajar.

B. Materi Prasyarat

Bab “Transformasi Geometri” memiliki materi prasyarat yang cukup banyak. Materi-materi prasyarat tersebut meliputi transformasi dasar, persamaan garis, matriks, trigonometri, dan vektor.

Pada fase D, peserta didik telah mempelajari transformasi geometri, seperti translasi, pencerminan, rotasi, dan dilatasi. Materi-materi tersebut merupakan prasyarat untuk mempelajari bab ini. Selain itu, materi persamaan garis lurus dan gradien pada fase D menjadi prasyarat penting agar peserta didik mampu mengikuti pembelajaran terkait pencerminan terhadap sembarang garis.

Pada bab ini peserta didik juga akan mempelajari keterkaitan matriks dan operasinya dengan transformasi. Oleh karena itu, materi matriks pada Bab 1 Buku Siswa juga merupakan materi prasyarat. Untuk memahami materi rotasi, pemahaman materi trigonometri pada Bab 3 juga diperlukan. Penguasaan materi vektor pada Bab 4 juga dibutuhkan, paling tidak untuk memahami materi translasi.

C. Apersepsi

Dengan menggunakan fitur Matematika dalam Budaya, Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik menganalisis transformasi apa saja yang dapat dilihat pada motif batik Kawung. Dengan demikian, peserta didik dapat diajak meninjau kembali materi prasyarat yang telah dipelajari pada fase D.

Bapak/Ibu Guru juga dapat mengajak peserta didik memperhatikan garis-garis bantu yang tampak pada fitur Matematika dalam Budaya. Tujuannya adalah agar peserta didik meninjau kembali materi terkait persamaan garis yang merupakan salah satu materi prasyarat pada bab ini.

D. Penilaian sebelum Pembelajaran

Pada saat melakukan apersepsi, amati bagaimana peserta didik mengingat dan merespons terkait materi prasyarat. Misalkan banyak peserta didik yang tampak kebingungan terkait gradien dan persamaan garis lurus, Bapak/Ibu Guru sebaiknya memberikan sedikit pengingat terkait materi tersebut.

E. Panduan Pembelajaran Buku Siswa

Subbab A: Transformasi pada Bidang Kartesius

Kegiatan pembelajaran Subbab A dapat dilaksanakan dalam 12 JP dengan 1 JP = 45 menit. Bapak/Ibu Guru dapat menyesuaikan durasi pembelajaran sesuai dengan kondisi satuan pendidikan tempat mengajar.

Aktivitas 1

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menentukan peta dari pencerminan terhadap garis $y = mx + c$.

Untuk mengawali aktivitas ini, Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik untuk mencermati Definisi 5.1. Setelah itu, ajak peserta didik untuk mencermati Contoh 5.1 dan mengerjakan Mari Mencoba 5.1 agar mereka memiliki pengalaman mencari peta pencerminan terhadap garis yang persamaannya diketahui.

Ilustrasi untuk seluruh Mari Mencoba pada bab “Transformasi Geometri” yang membutuhkan ilustrasi dapat diakses melalui pranala <https://s.id/ilustrasiMariMencobaBabTransformasi> atau kode respons cepat di samping.



Bapak/Ibu dapat menjadikan ilustrasi tersebut sebagai salah satu media pembelajaran atau sekadar untuk melihat ilustrasi dan gambar bentuk geometris yang sedang dibahas.



Alternatif Penyelesaian

Kita akan coba menggunakan tiga langkah berikut untuk menemukan bayangan dari titik (5, 1) yang dicerminkan terhadap garis $y = 2x + 1$.

Langkah 1: Tentukan persamaan garis yang tegak lurus dengan garis $y = 2x + 1$ dan melalui titik (5, 1).

Garis dengan gradien $-\frac{1}{2}$ dan melalui titik (5, 1) memiliki persamaan $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Langkah 2: Tentukan titik potong antara garis hijau ($y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$) dan garis biru ($y = 2x + 1$).

Titik potongnya adalah (1, 3).

Langkah 3: Tentukan titik bayangan.

Amati bahwa titik potong merupakan titik tengah antara titik asal dan bayangan. Artinya, misal bayangan adalah (x, y), secara aljabar dapat ditulis:

$$(1, 3) = \left(\frac{5 + x}{2}, \frac{1 + y}{2} \right) \Leftrightarrow x = -3 \text{ dan } y = 5$$

Berdasarkan langkah-langkah di atas, kita memperoleh bayangan (-3, 5).

Untuk menemukan rumus umumnya, ajak peserta didik untuk mengerjakan aktivitas Eksplorasi: Mencari Peta dari Pencerminkan terhadap Garis $y = mx + c$.



Eksplorasi

Mencari Peta dari Pencerminkan terhadap garis $y = mx + c$

Alternatif Penyelesaian

Langkah 1:

- Gradien dari garis hijau adalah $-\frac{1}{m}$.
- Persamaan garis hijau adalah $y = -\frac{1}{m}x + b + \frac{a}{m}$.

Langkah 2:

Titik potong kedua garis adalah titik

$$Q\left(\frac{a+m(b-c)}{m^2+1}, m\left(\frac{a+m(b-c)}{m^2+1}\right)+c\right)$$

Langkah 3:

- Titik Q merupakan titik tengah dari titik P dan R .
- $R\left(2\left(\frac{a+m(b-c)}{m^2+1}\right)-a, 2m\left(\frac{a+m(b-c)}{m^2+1}\right)+2c-b\right)$.

Sebagai tindak lanjut dari Aktivitas 1 tadi, Bapak/Ibu Guru dapat mengarahkan peserta didik untuk mencermati Contoh 5.2 dan menyelesaikan soal Mari Mencoba 5.2.

**Mari Mencoba 5.2****Alternatif Penyelesaian**

- Titik asal: $(-3, 12)$ maka $a = -3$ dan $b = 12$
- Persamaan garis: $y = 3x + 1$ maka $m = 3$ dan $c = 1$

Berdasarkan Sifat 5.1, kita akan menghitung d dengan rumus:

$$d = \frac{a+m(b-c)}{m^2+1} = \frac{-3+3(12-1)}{3^2+1} = 3$$

Sehingga, bayangannya dapat ditentukan dengan

$$(2d-a, 2md+2c-b) = (2 \cdot 3 + 3, 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 12) = (9, 8)$$

Jadi, bayangan dari titik $(-3, 12)$ yang dicerminkan terhadap garis $y = 3x + 1$ adalah $(9, 8)$.

Selanjutnya, jika masih memungkinkan, peserta didik dapat diajak menemukan cara untuk menentukan peta dari pencerminan terhadap garis dengan persamaan $ax + by + c = 0$. Untuk hal ini, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan fitur Mari Berpikir Kritis. Sebagai tindak lanjut dari

kegiatan tersebut, peserta didik dapat diarahkan untuk mencermati Contoh 5.3 dan mengerjakan Mari Mencoba 5.3.



Mari Mencoba 5.3

Alternatif Penyelesaian

- Titik asal: $(-2, 2)$ maka $x_0 = -2$ dan $y_0 = 2$
- Persamaan garis: $2x - y + 1$ maka $a = 2$, $b = -1$, dan $c = 1$

Misalkan titik bayangannya adalah (x', y') . Berdasarkan Mari Berpikir Kritis, kita mendapatkan hasil berikut.

$$x' = x_0 - \frac{2a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} = -2 - \frac{2 \cdot 2(2 \cdot (-2) + (-1)2 + 1)}{2^2 + 1^2} = 2$$

$$y' = y_0 - \frac{2b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} = 2 - \frac{2 \cdot (-1)(2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 + 1)}{2^2 + 1^2} = 0$$

Jadi, bayangan dari titik $(-2, 2)$ yang dicerminkan terhadap garis $2x - y + 1$ adalah $(2, 0)$.

Aktivitas 2

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menentukan peta dari translasi oleh sebuah vektor.

Untuk mengawali aktivitas ini, Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik untuk mencermati definisi translasi pada Buku Siswa. Selanjutnya, ajaklah peserta didik untuk mencermati Contoh 5.4 dan mengerjakan Mari Mencoba 5.4.



Mari Mencoba 5.4

Alternatif Penyelesaian

Persamaan $x^2 + y^2 = 25$ merepresentasikan lingkaran dengan jari-jari 5 dan titik pusat $(0, 0)$. Karena translasi bersifat tidak mengubah bentuk

geometris dan hanya menggesernya, lingkaran bayangan akan tetap menjadi lingkaran dengan jari-jari 5. Namun, titik pusatnya akan bergeser dari $(0, 0)$ ke $(2, 1)$ oleh translasi dengan vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Jadi, persamaan lingkaran bayangan adalah $(x' - 2)^2 + (y' - 1)^2 = 9$.

Sebagai tindak lanjut, ajaklah peserta didik untuk mencoba mendiskusikan Mari Berpikir Kritis. Peserta didik diharapkan dapat menyimpulkan bahwa sembarang fungsi $f(x) = y$ yang ditranslasikan oleh vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ akan menjadi $f(x - a) = y - b$.

Aktivitas 3

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menentukan peta dari sebuah rotasi.

Bapak/Ibu Guru mengajak peserta didik untuk mencermati definisi rotasi pada Buku Siswa. Kemudian, Bapak/Ibu menjelaskan bagaimana menurunkan rumus untuk rotasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sebesar θ . Untuk keperluan ini, peserta didik perlu diajak untuk meninjau kembali identitas trigonometri berikut:

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta$$

$$\sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta$$

Setelah menemukan rumus dan memahami Sifat 5.2, ajaklah peserta didik untuk memperhatikan Contoh 5.5 dan mengerjakan Mari Mencoba 5.5.



Mari Mencoba 5.5

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Sifat 5.2, kita memperoleh hasil berikut.

$$\begin{aligned} x' &= 3\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ - \sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ & y' &= 3\sqrt{3} \sin 30^\circ + \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ \\ &= 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} & &= 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \qquad \qquad = \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}$$

Jadi, petanya adalah titik $P' \left(\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2} \right)$.

Selanjutnya, aktivitas inti adalah mengerjakan Eksplorasi: Rotasi terhadap Sembarang Titik. Sebaiknya peserta didik dibagi dalam kelompok-kelompok kecil untuk mengerjakan aktivitas ini.



Eksplorasi

Rotasi terhadap Sembarang Titik

Alternatif Penyelesaian

Langkah 1:

- Vektor $\overrightarrow{CO}$ adalah $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$.
- Hasil translasinya adalah titik $(x - a, y - b)$.

Langkah 2:

Hasil rotasinya adalah

$$((x - a) \cdot \cos \theta - (y - b) \cdot \sin \theta, (x - a) \cdot \sin \theta + (y - b) \cdot \cos \theta).$$

Langkah 3:

- Vektor $\overrightarrow{OC}$ adalah $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- $((x - a) \cdot \cos \theta - (y - b) \cdot \sin \theta + a, (x - a) \cdot \sin \theta + (y - b) \cdot \cos \theta + b)$.

Selanjutnya, ajak peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 5.6.



Mari Mencoba 5.6

Alternatif Penyelesaian

- Titik asal: $(4\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$ maka $x = 4\sqrt{2}$ dan $y = 5\sqrt{2}$
- Titik pusat rotasi: $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ maka $a = \sqrt{2}$ dan $b = 2\sqrt{2}$

Dengan menggunakan Sifat 5.3, kita memperoleh petanya adalah $A'(x', y')$ dengan absis dan ordinat sebagai berikut.

$$\begin{aligned}x' &= (x - a) \cdot \cos \theta - (y - b) \cdot \sin \theta + a \\&= (4\sqrt{2} - \sqrt{2}) \cdot \cos 30^\circ - (5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) \cdot \sin 30^\circ + \sqrt{2} \\&= 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \\&= \frac{3}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \\y' &= (x - a) \cdot \sin \theta + (y - b) \cdot \cos \theta + b \\&= (4\sqrt{2} - \sqrt{2}) \cdot \sin 30^\circ + (5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) \cdot \cos 30^\circ + 2\sqrt{2} \\&= 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} + 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \\&= \frac{7}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{6}\end{aligned}$$

Jadi, titik petanya adalah $A' \left(\frac{3}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{7}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{6} \right)$.

Aktivitas 4

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menentukan peta dari sebuah dilatasi.

Penyampaian materi dilatasi diawali dengan mengajak peserta didik untuk mencermati Definisi 5.4 yang dilanjutkan dengan mempelajari Contoh 5.7 dan mengerjakan Mari Mencoba 5.7.



Mari Mencoba 5.7

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $A'(x', y') = D_{C,k}(A)$. Berdasarkan Definisi 5.4, maka $\overrightarrow{CA'} = k \cdot \overrightarrow{CA}$. Dengan demikian, kita memperoleh persamaan berikut.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA'} &= k \cdot \overrightarrow{CA} \\ \begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' - 2 \end{pmatrix} &= 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 5 - 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' - 2 \end{pmatrix} &= 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' - 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Maka

$$x' = 9 \text{ dan } y' = 14$$

$$\text{Jadi, } D_{C,k}(A) = A'(9, 14).$$

Dari pengalaman belajar di atas, Bapak/Ibu Guru mengajak peserta didik untuk menemukan rumus umum peta dari sebuah dilatasi. Peserta didik diajak untuk mencermati bagaimana Sifat 5.4 bekerja. Setelah itu, Bapak/Ibu mengajak peserta didik untuk melihat Contoh 5.8 dan mengerjakan Mari Mencoba 5.8. Jika contoh tersebut dirasa terlalu kompleks, cobalah membuat contoh yang lebih sederhana.



Mari Mencoba 5.8

Alternatif Penyelesaian

1. Jika lingkaran $L: (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ didilatasikan dengan titik pusat $C(a, b)$ dan faktor skala $k \neq 0$, menjadi lingkaran dengan persamaan

$$L': \left(\frac{x' - a(1 - k)}{k} - m \right)^2 + \left(\frac{y' - b(1 - k)}{k} - n \right)^2 = r^2$$

Atau, jika kita sederhanakan menjadi

$$L': \left(x' - [a(1 - k) + km] \right)^2 + \left(y' - [b(1 - k) + kn] \right)^2 = (kr)^2$$

2. a. Perbandingan jari-jari kedua lingkaran adalah $1:k$.
b. Perbandingan luas kedua lingkaran adalah $1:k^2$.

Jika waktu masih memungkinkan dan Bapak/Ibu ingin mengajak peserta didik untuk menyelidiki bentuk geometri lain, seperti garis dan persegi jika didilatasikan, Bapak/Ibu dapat menggunakan fitur Mari Berpikir Kritis.

Subbab B: Kaitan Matriks dengan Transformasi

Kegiatan pembelajaran Subbab B dapat dilaksanakan dalam 13 JP dengan 1 JP = 45 menit. Bapak/Ibu Guru dapat menyesuaikan durasi

pembelajaran sesuai dengan kondisi satuan pendidikan tempat mengajar.

Aktivitas 5

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menentukan peta dari pencerminan terhadap garis menggunakan operasi matriks.

Aktivitas ini dapat dilakukan dalam kelompok. Setiap kelompok diminta mengerjakan aktivitas Eksplorasi: Mencari Matriks yang Berkaitan dengan Pencerminan. Selama kelompok mengerjakan aktivitas eksplorasi tersebut, Bapak/Ibu Guru dapat memantau pekerjaan kelompok dan mencatat hal-hal penting selama dinamika kelompok. Selanjutnya, Bapak/Ibu mengajak peserta didik untuk mengerjakan fitur Mari Berpikir Kritis.



Eksplorasi

Mencari Matriks yang Berkaitan dengan Pencerminan

Alternatif Penyelesaian

$$1. \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rx + sy \\ tx + uy \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} rx + sy \\ tx + uy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Maka

$$rx + sy = x$$

$$tx + uy = -y$$

Diperoleh

$$r = 1, s = 0, t = 0, u = -1$$

Oleh karena itu, matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap sumbu-x adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Karena pencerminan terhadap sumbu-y memetakan (x, y) ke $(-x, y)$, kita memperoleh

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} rx + sy \\ tx + uy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

Maka

$$rx + sy = -x$$

$$tx + uy = y$$

Diperoleh

$$r = -1, s = 0, t = 0, u = 1$$

Oleh karena itu, matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap sumbu-y adalah $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Karena pencerminan terhadap garis $y = x$ memetakan (x, y) ke (y, x) , kita memperoleh

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} rx + sy \\ tx + uy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

Maka

$$rx + sy = y$$

$$tx + uy = x$$

Diperoleh

$$r = 0, s = 1, t = 1, u = 0$$

Oleh karena itu, matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Karena pencerminan terhadap garis $y = -x$ memetakan (x, y) ke $(-y, -x)$, kita memperoleh

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} rx + sy \\ tx + uy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$$

Maka

$$rx + sy = -y$$

$$tx + uy = -x$$

Diperoleh

$$r = 0, s = -1, t = -1, u = 0$$

Oleh karena itu, matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap garis $y = -x$ adalah $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Untuk kegiatan Mari Berpikir Kritis, silakan menyimak penjelasan berikut.



Mari Berpikir Kritis

Alternatif Penyelesaian

Untuk menemukan dua operasi matriks yang diinginkan tidak dapat menggunakan cara yang sama dengan kegiatan eksplorasi sebelumnya. Berdasarkan Sifat 5.5 dan Sifat 5.6, ditambah dengan informasi dari petunjuk, kita dapat memperoleh dua persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \begin{bmatrix} 2k - x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bullet \quad \begin{bmatrix} x \\ 2h - y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran tersebut, kita memperoleh simpulan berikut.

- Matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis $x = k$ adalah

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis $y = h$ adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2h \end{bmatrix}$$

Video pembahasan matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis $y = mx$ dapat diakses melalui pranala <https://s.id/VideoRefleksi1> atau kode respons cepat di samping.

Video pembahasan matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis $y = mx + c$ dapat diakses melalui pranala <https://s.id/VideoRefleksi2> atau kode respons cepat di samping.

Video pembahasan matriks yang terkait dengan pencerminan terhadap garis $ax + by + c = 0$ dapat diakses melalui pranala <https://s.id/VideoRefleksi3> atau kode respons cepat di samping.



Selama proses pembelajaran Aktivitas 5, Bapak/Ibu juga dapat menugaskan peserta didik untuk mengerjakan setiap soal Mari Mencoba yang bersesuaian dengan contoh-contohnya.

Aktivitas 6

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menentukan peta dari translasi oleh vektor menggunakan operasi matriks.

Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik untuk mengerjakan aktivitas Eksplorasi: Mencari matriks yang Berkaitan dengan Translasi. Kemudian, peserta didik diajak untuk memperhatikan contoh dan mari mencoba pada bagian ini.



Eksplorasi

Mencari Matriks yang Berkaitan dengan Translasi

Alternatif Penyelesaian

Kita dapat menuliskan matriks tersebut menjadi penjumlahan dua buah matriks berikut: $\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Untuk kegiatan Mari Mencoba 5.13, berikut adalah penyelesaiannya.



Mari Mencoba 5.13

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Sifat 5.6, kita memperoleh $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Aktivitas 7

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menentukan peta dari rotasi menggunakan operasi matriks.

Pada aktivitas ini, Bapak/Ibu Guru membimbing peserta didik untuk menemukan matriks yang berkaitan dengan rotasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dengan mengerjakan aktivitas Eksplorasi. Untuk menemukan matriks yang berkaitan dengan rotasi terhadap sembarang titik pusat, ajak peserta didik untuk memperhatikan Sifat 5.8 dan menerka cara menemukannya.



Eksplorasi

Mencari Matriks Rotasi terhadap Titik Asal $(0, 0)$ Sebesar θ

Alternatif Penyelesaian

Persamaan matriks tersebut dapat diselesaikan dengan cara berikut.

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta \\ x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} rx + sy \\ tx + uy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}$$

Maka

$$rx + sy = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$tx + uy = x \sin \theta + y \cos \theta$$

Diperoleh

$$r = \cos \theta, s = -\sin \theta, t = \sin \theta, \text{ dan } u = \cos \theta$$

Jadi, kita dapat menyimpulkan bahwa matriks yang diinginkan adalah

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, peserta didik mencermati Sifat 5.7 dan Sifat 5.8, kemudian mengerjakan Mari Mencoba 5.14.



Mari Mencoba 5.14

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Sifat 5.7, kita dapat mencari matriks dengan cara berikut. Besar rotasi $\frac{1}{6}\pi$ radian = 30° .

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Aktivitas 8

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menentukan peta dari dilatasi menggunakan operasi matriks.

Dengan bermodalkan pengetahuan tentang dilatasi pada Subbab A dan pengetahuan terkait matriks, peserta didik diajak untuk menemukan matriks yang terkait dengan dilatasi. Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik untuk mengerjakan aktivitas Eksplorasi: Mencari Matriks yang Berkaitan dengan Dilatasi.



Eksplorasi

Mencari Matriks yang Berkaitan dengan Dilatasi

Alternatif Penyelesaian

1. Kita dapat menyelesaikan persamaan matriks dengan cara berikut.

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} rx + sy \\ tx + uy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

Maka

$$rx + sy = kx$$

$$tx + uy = ky$$

Diperoleh

$$r = k, s = 0, t = 0, u = k$$

Akibatnya, matriks yang diinginkan adalah $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.

2. Kita dapat menuliskan:

$$\begin{bmatrix} k(x-a) + a \\ k(y-b) + b \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Berdasarkan nomor 1, kita dapat menuliskan $k \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$ sebagai $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$. Dengan demikian, matriks yang terkait dilatasi dengan titik pusat (a, b) dan faktor skala $k \neq 0$ adalah

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, ajak peserta didik untuk menyelesaikan permasalahan pada Mari Mencoba berikut.



Mari Mencoba 5.15

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Sifat 5.10, kita dapat menemukan petanya sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a \\ 3b \end{bmatrix}$$

Jadi, koordinat petanya adalah $(3a, 3b)$.

Subbab C: Komposisi Transformasi dengan Matriks

Kegiatan pembelajaran Subbab C dapat dilaksanakan dalam 5 JP dengan 1 JP = 45 menit. Bapak/Ibu Guru dapat menyesuaikan durasi pembelajaran sesuai dengan kondisi satuan pendidikan tempat mengajar.

Aktivitas 9

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menentukan peta dari komposisi transformasi menggunakan operasi matriks.

Bapak/Ibu Guru bertugas membimbing peserta didik untuk menemukan keterkaitan antara melakukan operasi komposisi transformasi dan operasi perkalian matriks. Peserta didik dapat melakukan Eksplorasi: Mengoperasikan Komposisi Transformasi dengan Matriks. Jika masih memungkinkan, selanjutnya ajaklah peserta didik untuk mengerjakan fitur Mari Berpikir Kritis.



Eksplorasi

Mengoperasikan Komposisi Transformasi dengan Matriks

Alternatif Penyelesaian

- Matriks pencerminan terhadap sumbu-y: $T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Matriks rotasi terhadap titik pusat O sebesar 90° : $T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Berikut adalah hasil peta berdasarkan dua cara.
 - Transformasi sembarang titik $P(x, y)$ oleh T_1 sebagai berikut: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$. Oleh karena itu, diperoleh titik $P'(-x, y)$. Selanjutnya, titik $P'(-x, y)$ ditransformasikan oleh T_2 sebagai berikut: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$. Jadi, hasil komposisi transformasi akhirnya adalah titik $P''(-y, -x)$.
 - Alternatifnya, kita dapat memperhatikan operasi matriks berikut: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$. Jadi, peta dari komposisi transformasinya adalah titik $P''(-y, -x)$.
 - Hasil perkalian pertama dan kedua sama. Berdasarkan operasi di atas, kita dapat melihat bahwa matriks $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ berkaitan dengan transformasi $T_2 \circ T_1$ yang didapatkan dengan cara mengalikan matriks yang terkait transformasi T_1 dan T_2 .
 - Hal tersebut dijamin oleh sifat asosiatif pada operasi perkalian matriks.

Setelah itu, ajak peserta didik untuk mencermati Sifat 5.11. Untuk mengasah kemampuan peserta didik dalam menggunakan sifat tersebut, mintalah mereka untuk mengerjakan Mari Mencoba 5.16.



Mari Mencoba 5.16

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Sifat 5.5 dan Sifat 5.7, diperoleh

- matriks pencerminan terhadap sumbu- y adalah $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

- matriks rotasi terhadap titik asal (0, 0) sebesar 180° adalah
$$\begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriks komposisi dari pencerminan terhadap sumbu-y dilanjutkan rotasi terhadap titik asal (0, 0) sebesar 180° adalah

$$T_2 \circ T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Akibatnya, peta yang diinginkan dapat dicari dengan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Jadi, petanya adalah $(-2, -3)$.

Mari Mencoba 5.17 dapat diselesaikan dengan cara serupa menggunakan perkalian tiga matriks yang sesuai.

F. Tindak Lanjut

1. Pengayaan

Sebagai pengayaan, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik mengerjakan kegiatan yang terdapat pada Mari Berpikir Kritis, Aktivitas Interaktif, dan Matematika dalam Budaya.

2. Remedial

Bagi peserta didik yang kesulitan memahami materi transformasi geometri, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan strategi pembelajaran yang berbeda dengan pembelajaran sebelumnya. Bapak/Ibu dapat menjelaskan definisi dan rumus, kemudian memberikan contoh dan soal latihan yang mempunyai tingkat kesulitan sama dengan contoh. Kegiatan remedial dapat diberikan secara individual, berkelompok, dan klasikal.

G. Asesmen Sumatif

Fitur proyek pada Buku Siswa dapat digunakan untuk penilaian sumatif. Bapak/Ibu Guru dapat mengembangkan proyek ini menjadi

sebuah portofolio bagi peserta didik. Artinya, proyek ini dapat mulai dikerjakan pada awal semester hingga akhir semester. Bapak/Ibu sebaiknya merekam setiap perkembangan peserta didik dalam bentuk portofolio kertas atau digital, misalnya di Google Drive. Hasil final dari motif ini juga dapat dibuat sebagai sebuah nilai prakarya tersendiri.

Tugas Bapak/Ibu adalah membimbing peserta didik dalam mengerjakan proyek ini sebaik mungkin. Perhatikan bahwa setiap peserta didik memiliki kecepatan kerja dan kreativitas masing-masing, jadi Bapak/Ibu tidak memaksakan suatu metode atau membatasi kreativitas peserta didik. Sering kali kitalah nanti yang akan belajar banyak dari peserta didik, baik dalam segi matematika, teknologi, maupun kekayaan budaya di Indonesia maupun dunia. Untuk detail rubrik penilaian dapat dilihat pada bagian Kunci Jawaban.

H. Kunci Jawaban

1. Latihan A Transformasi pada Bidang Kartesius

Alternatif Penyelesaian

Gambar untuk Latihan A dapat diakses pada pranala <https://s.id/GambarLatihanA> atau kode respons cepat di samping.



1. Salah. Sebagai contoh, persegi akan dipetakan menjadi persegi, namun luasnya akan berubah jika dilatasi dengan faktor dua.
2. Benar
3. Benar
4. Berikut jawaban untuk soal nomor 4.
 - a. Berdasarkan Sifat 5.1, diperoleh $\left(-\frac{1}{2}, 6\right)$.
 - b. Berdasarkan Mari Berpikir Kritis, titik $(3, 5)$ yang dicerminkan terhadap garis $2x + 3y + 5 = 0$ menghasilkan titik $(-5, -7)$.
 - c. Berdasarkan Definisi 5.2, segitiga peta $A'B'C'$ memiliki titik sudut $A'(-4, 5)$, $B'(-2, 2)$, dan $C'(-7, 0)$.

- d. Berdasarkan Definisi 5.3, setiap titik $P(x, y)$ pada garis $3x - 2y + 5 = 0$ dipetakan ke $P' = (x', y') = (-x, -y)$. Kita juga dapat menuliskan $(x, y) = (-x', -y')$. Untuk mendapatkan persamaan dari garis peta, kita substitusikan nilai $(x, y) = (-x', -y')$ ke $3x - 2y + 5 = 0$ sehingga diperoleh $-3x' + 2y' + 5 = 0$. Karena x' dan y' adalah variabel semu, kita dapat menuliskan persamaan dari peta sebagai $-3x + 2y + 5 = 0$.
- e. Lingkaran $L: (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$ yang dilatasi dengan titik pusat $C(2, 3)$ dan faktor skala 3 menghasilkan lingkaran $L': (x - 2)^2 + (y + 12)^2 = 900$.

2. Latihan B Kaitan Matriks dengan Transformasi

Alternatif Penyelesaian

- Benar
- Salah. Seharusnya berkaitan dengan operasi matriks $\begin{bmatrix} x+2 \\ y+3 \end{bmatrix}$.
- Benar
- Berikut adalah matriks yang diinginkan:
 - $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

5. Berikut adalah uraian jawaban untuk nomor 5:

a.
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b. Untuk setiap titik $P(x, y)$ dipetakan ke $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$.
Akibatnya, $3x^2 - 2y + 5 = 0$ dipetakan ke $3(y)^2 - 2(-x) + 5 = 0$
 $\Leftrightarrow 3y^2 + 2x + 5 = 0$.

c. Dengan menuliskan titik A , B , dan C sebagai kolom-kolom, kita dapat menuliskan

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{6}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{9}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Artinya, petanya adalah $A' = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$, $B' = \left(\frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$,
dan $C' = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{9}{\sqrt{2}}\right)$.

d. Untuk setiap titik $P(x, y)$ dipetakan ke $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$. Artinya,
kita memiliki $(x', y') = (3x, 3y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}x'$ dan $y = \frac{1}{3}y'$. Akibatnya,
 $x - 2y + 3 = 0$ dipetakan ke $\left(\frac{1}{3}x'\right) - 2\left(\frac{1}{3}y'\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow x' - 2y' + 9 = 0$.
Karena x' dan y' adalah variabel semu, kita dapat menuliskan
persamaan dari peta sebagai $x - 2y + 9 = 0$.

e. Untuk setiap titik $P(x, y)$ dipetakan ke $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ y \end{bmatrix}$.
Artinya, kita mempunyai $(x', y') = (x + 2y, y) \Leftrightarrow x = x' - 2y'$ dan
 $y = y'$. Akibatnya, $y = 2x^3 - x^2 + 5x$ dipetakan ke $y' = (x' - 2y')^3 -$
 $(x' - 2y')^2 + 5(x' - 2y')$.

3. Latihan C Komposisi Transformasi dengan Matriks

Alternatif Penyelesaian

1. Salah. Berdasarkan matriks-matriks yang terkait dengan transformasi-transformasi tersebut, kita memperoleh $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
2. Benar
3. Benar
4. Berikut adalah jawaban soal nomor 4.
 - a. Rotasi terhadap titik pusat $(0, 0)$ sebesar 180°
 - b. $P'(-a, -b)$
5. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4. Uji Kompetensi

Gambar untuk Uji Kompetensi yang dibutuhkan untuk memahami ilustrasi jawaban dapat diakses melalui pranala <https://s.id/GambarUjiKompetensiBab5> atau kode respons cepat di samping.



1. Salah
2. Benar
3. Salah
4. Salah
5. Benar
6. Translasi
7. Segitiga
8. $\begin{bmatrix} \cos 270^\circ & -\sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
10. $(-2, 3)$
11. $2x + 3y = -7$

12. $(-6, -2)$

13. 36π

14. $(x + a, 2h - (y + b))$

15. Berikut adalah matriks yang terkait.

a.
$$\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b.
$$\begin{bmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

16.
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a \\ 3b \end{bmatrix}$$

17. Petanya adalah sebagai berikut.

a. $-2x + 3y + 7 = 0$

b. $y = -x^3 - 2x^2 - 3x - 4$

18. $(6, -5)$

19. $(x + 2, -3y)$

20. $2y + 3x - 5 = 0$

21. $-(y + 5) = 2(x - 4)^2 - 3(x - 4) + 5$

22. Karena $y = 2x^2 - 12x + 19 = 2(x - 3)^2 + 1$, maka $y = x^2$ ditranslasikan oleh vektor $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

23. Pernyataan tersebut dapat dibuktikan menggunakan operasi dari matriks yang terkait, yakni

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

24. Karena dilatasi terhadap titik asal $(0, 0)$ dapat dinyatakan sebagai perkalian skalar, sedangkan perkalian skalar dengan matriks (2×2) adalah komutatif.

25. Pernyataan tersebut dapat dibuktikan, salah satunya, dengan menggunakan rumus jarak dari titik ke garis $ax + by + c = 0$.

5. Proyek

Berikut adalah salah satu contoh rubrik pengukuran yang dapat digunakan untuk menilai Proyek: Modifikasi Motif Khas Daerah dengan Transformasi Geometri.

Tabel 5.1 Contoh Rubrik Penilaian Proyek

Aspek Penilaian	Indikator (Skor)	Skor Maksimal
Pemilihan motif	Peserta didik mampu mendeskripsikan motif yang dipilih. Peserta didik juga dapat menguraikan alasan memilih motif tertentu dalam hal bagaimana sejarahnya dan apa yang menjadikannya menarik dan unik bagi peserta didik. Motif dapat berasal dari mana pun baik dari Indonesia maupun negara lain, namun uraian latar belakang pemilihan motif harus jelas. (20)	20
	Peserta didik mampu menguraikan salah satu alasan memilih motif tertentu, dapat terkait sejarahnya atau keunikannya. (15)	
	Peserta didik memilih motif tertentu tanpa keterangan yang jelas. (5)	
Identifikasi motif berdasarkan transformasi geometri	Peserta didik mampu mengidentifikasi bentuk dasar dari motif yang dipilih, menjelaskannya dalam bentuk visual, dan mendeskripsikan (dengan kata-kata dan bantuan visual) proses transformasi dari bentuk paling sederhananya sampai menjadi sebuah bentuk motif utuh. Peserta didik secara eksplisit menggunakan istilah dalam transformasi geometri maupun konsep matematika lain yang terkait. (30)	30
	Peserta didik mampu mengidentifikasi bentuk dasar dari motif yang dipilih dan mendeskripsikan proses transformasi dari bentuk paling sederhananya sampai menjadi sebuah bentuk motif utuh, namun ilustrasi visual dan deskripsi kata-katanya tidak mencakup konsep transformasi geometri. (20)	
	Peserta didik hanya menampilkan bentuk paling sederhana dan bentuk motif akhir. (10)	

Aspek Penilaian	Indikator (Skor)	Skor Maksimal
Modifikasi motif	Peserta didik mendeskripsikan beberapa hal berikut: (1) motivasi dalam memodifikasi motif; (2) deskripsi modifikasi motif secara visual dan kata-kata menggunakan konsep transformasi geometri pada bidang Kartesius. (30)	30
	Peserta didik hanya mendeskripsikan modifikasi motif secara visual dan kata-kata menggunakan konsep transformasi geometri pada bidang Kartesius (20)	
	Peserta didik hanya mendeskripsikan motivasi dalam memodifikasi motif. (10)	
Penggunaan koordinat Kartesius	Peserta didik menggunakan koordinat Kartesius secara visual atau analitik dalam menjelaskan proses transformasi dalam dua fase: (1) analisis motif, (2) modifikasi motif. (10)	10
	Peserta didik menggunakan koordinat Kartesius secara visual atau analitik dalam menjelaskan proses transformasi dalam salah satu dari dua fase: (1) analisis motif, (2) modifikasi motif. (5).	
Presentasi di dalam bentuk video, audio, atau artikel	Peserta didik menjelaskan aspek-aspek berikut: (1) motif, asal muasalnya, dan sejarahnya, (2) analisis motif secara transformasi geometri, (3) ide modifikasi motif, dan (4) penjelasan modifikasi secara geometri. (40)	40
	Peserta didik menjelaskan tiga aspek. (30)	
	Peserta didik menjelaskan dua aspek. (20)	
	Peserta didik menjelaskan satu aspek. (10)	
Nilai-nilai Pancasila	Refleksi dari kegiatan proyek terkait nilai-nilai Pancasila.	20
Total Skor Maksimal		150

6. Pengayaan

Matriks Pencerminkan dan Vektor Searah Garis Refleksi

1. Matriks yang merepresentasikan pencerminan terhadap garis l adalah sebagai berikut.

$$\frac{1}{(-3)^2 + 2^2} \begin{bmatrix} (-3)^2 - 2^2 & 2 \cdot (-3) \cdot 2 \\ 2 \cdot (-3) \cdot 2 & 2^2 - (-3)^2 \end{bmatrix}$$

2. Matriks yang merepresentasikan pencerminan terhadap garis k adalah sebagai berikut.

$$\frac{1}{v_1^2 + v_2^2} \begin{bmatrix} v_1^2 - v_2^2 & 2v_1 v_2 \\ 2v_1 v_2 & v_2^2 - v_1^2 \end{bmatrix}$$

Ketika Komposisi Dua Pencerminkan Menghasilkan Rotasi

Komposisi dua buah pencerminan (refleksi) menghasilkan sebuah rotasi jika dua garis refleksi berpotongan. Rotasi yang dihasilkan berpusat di titik potong dua garis refleksi. Besar sudut rotasi dua kali lipat besar sudut antara dua garis.

I. Refleksi

Bapak/Ibu Guru dapat membimbing refleksi peserta didik terhadap pembelajaran pada bab “Transformasi Geometri”.

Bapak/Ibu Guru juga perlu melakukan refleksi agar kualitas pembelajaran dalam prosesnya maupun hasil akhir semakin meningkat. Refleksi dapat dilakukan dengan menganalisis strategi pembelajaran yang dapat ditingkatkan pada pembelajaran selanjutnya.

Tabel berikut ini merupakan contoh refleksi bagi Bapak/Ibu Guru.

Tabel 5.2 Panduan Refleksi Pembelajaran Transformasi Geometri

No.	Panduan Refleksi
1.	Deskripsikan pengalaman Bapak/Ibu Guru dalam mengajarkan Transformasi Geometri.

No.	Panduan Refleksi
2.	Deskripsikan perasaan dominan Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Transformasi Geometri.
3.	Evaluasilah pengalaman Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Transformasi Geometri.
4.	Apa saja pelajaran berharga yang telah dipetik Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Transformasi Geometri?
5.	Bagaimana rencana Bapak/Ibu Guru untuk menindaklanjuti pelajaran-pelajaran berharga tersebut?

J. Sumber Belajar

Berikut ini beberapa sumber belajar untuk mempelajari transformasi geometri.

- Buku Siswa
- “Modul Pembelajaran SMA Matematika Umum Kelas XI KD 3.5” dari Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. Modul ini berisikan materi yang serupa.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2024

Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut (Edisi Revisi)
untuk SMA Kelas XI

Penulis: Yosep Dwi Kristanto, Muhammad Taqiyuddin, Al Azhary Masta, Elyda Yulfiana
ISBN: 978-623-388-339-9

Panduan Khusus

Bab 6 FUNGSI DAN PEMODELANNYA



Sumber: UN Women/Ryan Brown/Flickr/CC BY-NC-ND 2.0 (2017)

A. Pendahuluan

1. Tujuan Pembelajaran

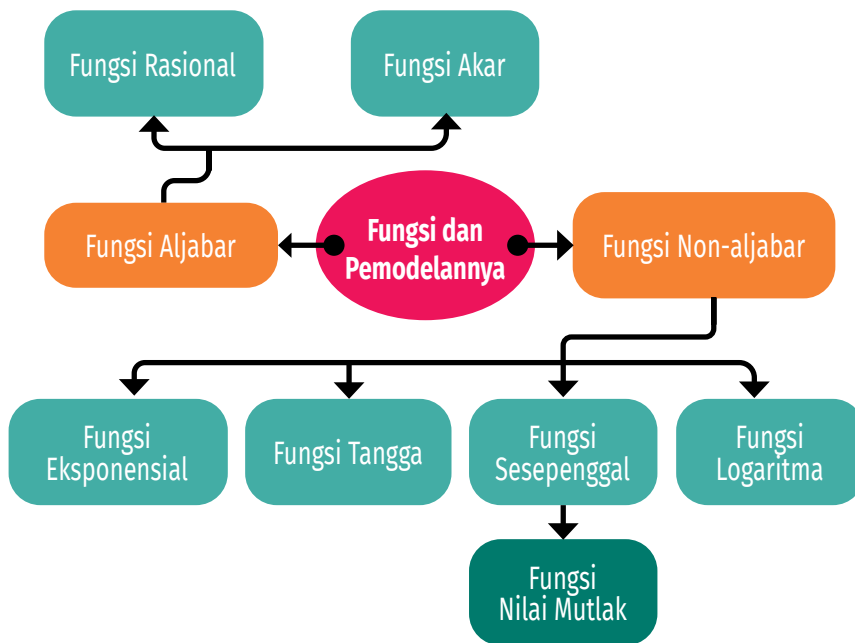
Setelah mempelajari bab ini, peserta didik diharapkan mampu:

- menentukan nilai fungsi logaritma, fungsi aljabar, dan fungsi non-aljabar, serta menganalisis karakteristik grafiknya.
- memodelkan dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari menggunakan fungsi logaritma, fungsi aljabar, dan fungsi non-aljabar.

Bapak/Ibu Guru dapat menentukan kriteria ketercapaian tujuan pembelajaran (KKTP) Bab 6 dengan mengacu pada kolom Tujuan Pembelajaran dalam **Tabel 3** Pemetaan Capaian Pembelajaran dan Tujuan Pembelajaran pada bagian “Panduan Umum”.

2. Peta Materi

Berikut ini peta materi pembelajaran fungsi dan pemodelannya pada Bab 6 Buku Siswa.



Gambar 6.1 Peta Materi Bab 6 Buku Siswa

3. Saran Durasi Pembelajaran

Kegiatan pembelajaran bab “Fungsi dan Pemodelannya” ini dapat dilaksanakan dalam 35 jam pelajaran (JP) dengan 1 JP = 45 menit. Bapak/Ibu Guru dapat menyesuaikan durasi pembelajaran sesuai dengan kondisi satuan pendidikan tempat mengajar.

B. Materi Prasyarat

Bapak/Ibu Guru dapat mempersiapkan kognisi peserta didik dengan mengidentifikasi materi yang menjadi prasyarat peserta didik sebelum mempelajari fungsi dan pemodelannya. Materi-materi yang menjadi prasyarat adalah sebagai berikut.

1. Eksponen
2. Logaritma
3. Fungsi
4. Fungsi polinomial

C. Apersepsi

Bapak/Ibu Guru dapat mengawali pembelajaran fungsi dan pemodelannya dengan menarik perhatian peserta didik. Salah satu caranya adalah dengan mengajak peserta didik untuk membayangkan apa yang akan terjadi jika populasi penduduk pada suatu wilayah geografis tertentu selalu meningkat setiap tahunnya. Laju pertumbuhan penduduk yang sangat tinggi dalam waktu singkat akan mengakibatkan terjadinya *ledakan penduduk*.

Selanjutnya, peserta didik diminta untuk berpikir tentang berbagai dampak buruk yang akan muncul jika peristiwa ledakan penduduk tidak diimbangi dengan kapasitas ekonomi yang memadai. Peserta didik diberikan penjelasan mengenai pentingnya mempelajari bab ini, yaitu dapat digunakan untuk memprediksi populasi penduduk pada masa mendatang. Dengan mempertimbangkan prediksi tersebut, faktor geografis, dan faktor ekonomis, peserta didik dapat membuat rekomendasi langkah-langkah pencegahan terjadinya dampak buruk dari ledakan penduduk.

D. Penilaian sebelum Pembelajaran

Sebelum memulai pembelajaran, Bapak/Ibu Guru dapat melakukan penilaian awal agar pembelajaran topik fungsi dan pemodelan ini sesuai dengan kebutuhan dan kesiapan peserta didik. Oleh karena itu, Bapak/Ibu Guru dapat membuat tes yang bertujuan mengetahui kemampuan dasar peserta didik berkaitan dengan materi pada bab “Fungsi dan Pemodelannya”. Bentuk tes dapat didesain dengan cukup sederhana dan cepat untuk dianalisis, juga memberikan informasi yang kaya tentang kemampuan dasar peserta didik. Cakupan materi tes dasar dapat menggunakan daftar kemampuan prasyarat dan bentuk-bentuk soal dapat mengacu pada tujuan pembelajaran.

E. Panduan Pembelajaran Buku Siswa

Subbab A: Fungsi Logaritma

Aktivitas 1

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menemukan konsep fungsi logaritma.

Bapak/Ibu Guru dapat membentuk beberapa kelompok kecil peserta didik yang memungkinkan mereka untuk belajar secara efektif dan efisien. Beri tahulah peserta didik bahwa mereka akan menemukan konsep fungsi logaritma. Setelah itu, mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi mengerjakan Eksplorasi. Pantaulah kegiatan belajar peserta didik selama diskusi berlangsung. Bimbing dan berilah arahan kepada semua kelompok dalam mengumpulkan informasi yang relevan dengan ide untuk memecahkan masalah yang diberikan pada kegiatan eksplorasi. Pembentukan kelompok ini dapat dilakukan untuk aktivitas-aktivitas berikutnya pada subbab ini.



Pertumbuhan Virus Covid-19

Alternatif Penyelesaian

1. Diketahui $P(t) = 50.000$. Dengan memanfaatkan konsep keterkaitan antara bentuk eksponensial dan logaritma, yakni

$$\begin{aligned} 50.000 &= 2e^{\left(\frac{1}{60} \ln 5.059\right)t} \\ \ln 25.000 &= \left(\frac{1}{60} \ln 5.059\right)t \\ \frac{60 \ln 25.000}{\ln 5.059} &= t \end{aligned}$$

Dengan memanfaatkan tabel logaritma atau kalkulator ilmiah, diperoleh

$$t = \frac{60 \ln 25.000}{\ln 5.059} \approx \frac{60 \times 10,13}{8,53} \approx 71,25 \text{ hari}$$

Jadi, dalam waktu sekitar 72 hari, sebanyak kurang lebih 50.000 orang terpapar virus Covid-19.

2. Dengan memanfaatkan konsep keterkaitan antara bentuk eksponensial dan logaritma, yakni $P(t) = 2e^{\left(\frac{1}{60} \ln 5.059\right)t}$, sehingga

$$\begin{aligned} \ln \frac{P(t)}{2} &= \left(\frac{1}{60} \ln 5.059\right)t \\ \frac{60 \ln \frac{P(t)}{2}}{\ln 5.059} &= t \end{aligned}$$

Jadi, model waktu yang dibutuhkan terhadap banyaknya orang

$$\text{yang terpapar Covid-19 adalah } t = \frac{60 \ln \frac{P(t)}{2}}{\ln 5.059}.$$

Dalam rangka memfasilitasi peserta didik membuat simpulan, Bapak/Ibu Guru dapat menunjuk beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Tunjukkan kelompok-kelompok yang memiliki strategi pengerjaan atau jawaban berbeda. Setelah presentasi, mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi presentasi tersebut. Kegiatan ini dapat diterapkan pada aktivitas-aktivitas selanjutnya.

Antisipasi Miskonsepsi

Ketika mengerjakan eksplorasi pertama, mungkin saja peserta didik mengalami kesalahan dalam perhitungan nilai logaritma. Oleh karena itu, Bapak/Ibu Guru dapat mengingatkan peserta didik untuk lebih berhati-hati dalam melakukan perhitungan. Kekeliruan lainnya dapat terjadi ketika membulatkan hasil perhitungan logaritma. Terkait hal ini, ajukan pertanyaan berikut di depan kelas untuk memulai diskusi: *Bagaimana aturan membulatkan ke atas atau ke bawah?*

Bapak/Ibu Guru dapat menugaskan peserta didik untuk mencermati Contoh 6.1. Selanjutnya, ajaklah peserta didik untuk menerapkan pemahamannya mengenai fungsi logaritma dengan mengerjakan Mari Mencoba 6.1 yang bersesuaian dengan Contoh 6.1.



Mari Mencoba

6.1

Alternatif Penyelesaian

1. $f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}\log \frac{1}{9} = 2$
2. $f\left(\frac{1}{27}\right) = \frac{1}{3}\log \frac{1}{27} = 3$

Aktivitas 2

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menggambar grafik fungsi logaritma dan memahami sifat-sifat dari fungsi logaritma dengan mengamati grafik fungsi logaritma.

Setelah memahami fungsi logaritma pada Aktivitas 1, ajaklah peserta didik untuk mengerjakan Aktivitas 2.



Grafik Fungsi Logaritma

Alternatif Penyelesaian

1. Nilai $f(x) = {}^2\log x$ untuk x yang diberikan.

$$\frac{1}{8} = 2^{-3} \text{ maka } {}^2\log 2^{-3} = -3$$

$$\frac{1}{4} = 2^{-2} \text{ maka } {}^2\log 2^{-2} = -2$$

$$\frac{1}{2} = 2^{-1} \text{ maka } {}^2\log 2^{-1} = -1$$

$$1 = 2^0 \text{ maka } {}^2\log 2^0 = 0$$

$$2 = 2^1 \text{ maka } {}^2\log 2^1 = 1$$

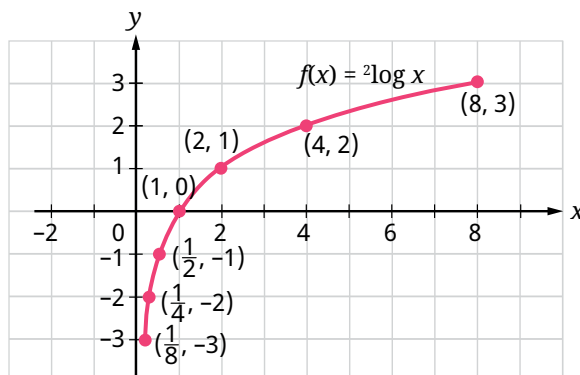
$$4 = 2^2 \text{ maka } {}^2\log 2^2 = 2$$

$$8 = 2^3 \text{ maka } {}^2\log 2^3 = 3$$

Dengan demikian, tabel lengkapnya sebagai berikut.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

2. $(\frac{1}{8}, -3)$, $(\frac{1}{4}, -2)$, $(\frac{1}{2}, -1)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(4, 2)$, dan $(8, 3)$.
3. Hasil peletakan titik-titik pada langkah 2 (bagian bulatan) sebagai berikut.



Gambar 6.2 Grafik $f(x) = {}^2\log x$

4. Sketsa grafik fungsi $f(x) = {}^2\log x$ berupa garis lengkung pada Gambar 6.2.
5. Jawaban bervariasi. Misalnya grafik fungsi f memotong sumbu- x di titik $(1, 0)$.

Antisipasi Miskonsepsi

Peserta didik kemungkinan mengalami kesalahan dalam menggambarkan grafik fungsi logaritma karena salah perhitungan. Oleh karena itu, Bapak/Ibu Guru dapat mengingatkan peserta didik untuk lebih berhati-hati dalam melakukan perhitungan. Misalnya, kekeliruan dalam menghitung operasi pangkat. (Contoh, mereka menganggap bahwa 2^3 sama dengan 2×3). Akibatnya, sketsa grafik mereka menjadi keliru.

Bapak/Ibu juga dapat mengingatkan peserta didik bahwa batas kiri dan kanan suatu grafik tidak harus sama dengan batas kiri dan kanan x yang dipilih (pada aktivitas eksplorasi, batas kiri dan kanan x yang dipilih adalah $\frac{1}{8}$ dan 8). Seperti pada pekerjaan peserta didik tersebut, grafiknya hanya digambar mulai dari $x = \frac{1}{8}$ sampai $x = 8$.

Pada kesempatan ini, singgunglah domain dari fungsi logaritma yang merupakan himpunan semua bilangan real positif. Dengan demikian, grafik fungsi f harus digambar sesuai dengan domainnya ini.

Kekeliruan lain dalam menggambar grafik yang dapat terjadi adalah grafiknya memotong sumbu- y . Terkait hal ini, ajukan pertanyaan-pertanyaan berikut ke kelas untuk memulai diskusi.

Apakah grafik fungsi $f(x) = {}^2\log x$ memotong sumbu- y ? Ataukah tidak mungkin? Mengapa?

Pada akhir diskusi tersebut, tegaskan bahwa grafik fungsi f tidak pernah memotong sumbu- y karena nol tidak termasuk domain f . Dengan kata lain, $f(0)$ tidak terdefinisi.

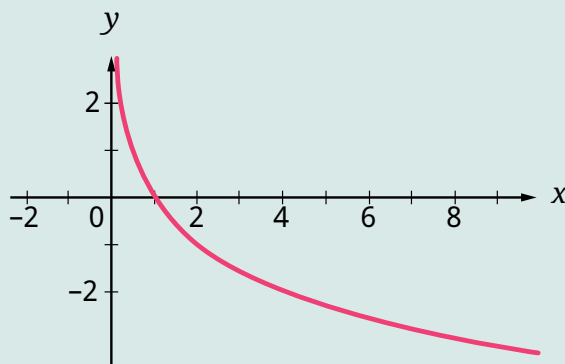
Bapak/Ibu Guru dapat menugaskan peserta didik untuk mencermati Contoh 6.2. Selanjutnya, ajaklah peserta didik menerapkan pemahamannya mengenai grafik fungsi logaritma dengan mengerjakan Mari Mencoba 6.2.



Mari Mencoba 6.2

Alternatif Penyelesaian

Berikut ini sketsa grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{2}\log x$.



Gambar 6.3 Grafik Fungsi f

Pada akhir Aktivitas 2, Bapak/Ibu Guru dapat menunjuk beberapa peserta didik untuk mengulas kembali pembelajaran yang telah dilakukan. Dalam ulasan ini, pertimbangkan untuk menanyakan beberapa pertanyaan panduan berikut.

- Dari kegiatan pembelajaran tadi, bagaimana kalian menggambar grafik fungsi logaritma?
- Apa perbedaan grafik fungsi eksponensial yang telah kalian pelajari di kelas X dengan grafik fungsi logaritma yang baru kalian pelajari?

Aktivitas 3

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menggunakan identitas eksponensial untuk menentukan sifat-sifat logaritma.

Melalui Aktivitas 3, peserta didik diajak untuk menggunakan identitas-identitas eksponensial yang telah dipelajari pada kelas X untuk menentukan sifat-sifat dari fungsi logaritma. Aktivitas ini diawali dengan meminta peserta didik meninjau kembali sifat-sifat eksponen, kemudian menggunakan identitas tersebut untuk menentukan identitas-identitas logaritma.

Bapak/Ibu Guru dapat menjelaskan terlebih dahulu bahwa *identitas logaritma* adalah persamaan logaritma yang selalu bernilai benar untuk semua kemungkinan nilai variabelnya. Penjelasan ini dapat dimulai dengan mengingatkan peserta didik bahwa identitas yang dimaksud dalam subbab ini sama dengan identitas yang telah dipelajari di kelas X. Selanjutnya, Bapak/Ibu Guru meminta peserta didik untuk mengerjakan aktivitas Eksplorasi: Menemukan Sifat-Sifat Logaritma. Ketika peserta didik mengerjakannya, berkulunglah ke bangku peserta didik untuk memantau dan memberikan topanan yang diperlukan.



Eksplorasi

Menemukan Sifat-Sifat Logaritma

Alternatif Penyelesaian

1. Karena $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$, berdasarkan definisi fungsi logaritma, diperoleh ${}^b\log (b^m \cdot b^n) = m + n$. Jadi, ${}^b\log (MN) = {}^b\log M + {}^b\log N$.
2. Sifat yang digunakan adalah $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$. Dengan menggunakan cara yang serupa dengan nomor 1, diperoleh

$${}^b\log \left(\frac{M}{N} \right) = {}^b\log M - {}^b\log N.$$

3. Dengan menggunakan sifat ${}^b\log (MN) = {}^b\log M + {}^b\log N$, diperoleh

$$\begin{aligned} {}^a\log (M^p) &= {}^a\log \underbrace{(M \times M \times M \times \dots \times M)}_{p \text{ kali}} \\ &= \underbrace{({}^a\log M + \dots + {}^a\log M)}_{\text{sebanyak } p} = p {}^a\log M \end{aligned}$$

Setelah itu, mintalah peserta didik mencermati Sifat 6.2 secara mandiri, kemudian mengerjakan bagian Mari Mencoba setelah Contoh 6.3. Selama peserta didik mengerjakannya, doronglah mereka untuk berdiskusi dengan temannya jika mengalami kesulitan.



Mari Mencoba 6.3

Alternatif Penyelesaian

1. Karena $f(x) = \ln x$, diperoleh

$$f(80) + f(y) = 4$$

$$f(80y) = 4$$

$$\ln(80y) = 4$$

$$80y = e^4$$

$$y = \frac{e^4}{80} \approx 0,68$$

Jadi, nilai y adalah sekitar 0,68.

2. Karena $f(x) = {}^2\log x$ dan $f(3) = 0,63$, diperoleh

$$f(18) = {}^2\log 18$$

$$= {}^2\log(2 \times 9)$$

$$= {}^2\log 2 + {}^2\log 9$$

$$= {}^2\log 2 + {}^2\log 3^2$$

$$= 1 + 2({}^2\log 3)$$

$$= 1 + 2(0,63)$$

$$= 2,26$$

Jadi, nilai $f(18)$ adalah 2,26.

Selanjutnya, Bapak/Ibu Guru perlu melanjutkan pembelajaran dengan menjelaskan Sifat 6.3. Sifat ini memuat beberapa identitas logaritma dasar yang penting untuk dikuasai oleh peserta didik. Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik untuk mendiskusikan pertanyaan pada kolom Mari Mengomunikasikan.



Alternatif Penyelesaian

Misalnya kita akan membuktikan sifat pertama pada Sifat 6.3. Misalkan nilai ${}^a\log M$ diketahui dan kita akan mencari nilai ${}^b\log M$. Langkah-langkahnya sebagai berikut.

1. Kita misalkan $y = {}^b\log M$.
2. Tulislah bentuk logaritma pada langkah (1) ke dalam bentuk eksponensial $b^y = M$.
3. Operasikan ruas kiri dan ruas kanan bentuk eksponensial pada langkah (2) menggunakan logaritma basis a , yaitu ${}^a\log(b^y) = {}^a\log M$.
4. Dengan menggunakan sifat-sifat logaritma, selesaikan y pada persamaan di langkah (3).

$$\begin{aligned} y {}^a\log b &= {}^a\log M \\ y &= \frac{{}^a\log M}{{}^a\log b} \end{aligned}$$

Berdasarkan langkah (1) dan (4), diperoleh

$${}^b\log M = \frac{{}^a\log M}{{}^a\log b} \text{ (terbukti)}$$

Untuk pembuktian sifat lainnya dapat memanfaatkan sifat logaritma lain dan identitas eksponensial yang pernah dipelajari di kelas sebelumnya.

Bapak/Ibu Guru perlu meminta salah satu peserta didik untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya, kemudian meminta peserta didik lain untuk menanggapi.

Aktivitas 4

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat memahami pemodelan fungsi logaritma.

Bapak/Ibu Guru, berilah penjelasan kepada peserta didik mengenai pemodelan fungsi logaritma. Ajaklah peserta didik menerapkan

pemahamannya tentang pemodelan fungsi logaritma dengan mengerjakan Mari Mencoba 6.4 yang bersesuaian dengan Contoh 6.4.



Mari Mencoba 6.4

Alternatif Penyelesaian

Banyaknya virus dalam waktu 30 hari (720 jam) adalah sebagai berikut.

$$720 = \frac{\log\left(\frac{N}{2}\right)^2}{\log 2}$$

$$720 \times \log 2 = \log\left(\frac{N}{2}\right)^2$$

$$\log 2^{720} = \log\left(\frac{N}{2}\right)^2$$

Sehingga diperoleh $2^{720} = \left(\frac{N}{2}\right)^2$. Akibatnya, $N = 2^{361}$.

Setelah peserta didik mengerjakan Mari Mencoba 6.4, tegaskan bahwa agar dapat menekan penyebaran virus Covid-19 maka kita perlu mengurangi interaksi secara langsung dengan orang lain, yaitu harus selalu berada di rumah. Selanjutnya, agar pemahaman peserta didik tentang pemodelan fungsi logaritma lebih baik lagi, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik mengerjakan Mari Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 6.5 sampai dengan Contoh 6.8. Contoh 6.5 memperlihatkan bagaimana penerapan logaritma dalam bidang informatika.



Mari Mencoba 6.5

Alternatif Penyelesaian

Karena simbol yang tersedia ada 26 ($N = 26$) dan panjang kata sandi terdiri atas 3 huruf ($L = 3$), maka entropi dari kata sandi tersebut adalah

$H = 3 \frac{\log 26}{\log 2} = 14,1$ bit. Jadi, banyaknya percobaan yang dibutuhkan untuk menghabiskan semua kemungkinan adalah $2^{14,1} = 17.559,9 \approx 17.560$ percobaan.

Selanjutnya, Mari Mencoba 6.6 memperlihatkan bagaimana pemodelan fungsi logaritma dalam peristiwa gempa.



Mari Mencoba 6.6

Alternatif Penyelesaian

Karena intensitas gempa $10^{9,3}$ kali daripada gempa tingkat nol, maka $I = 10^{9,3}I_0$. Dengan demikian,

$$R = \log \frac{I}{I_0} = \log \frac{10^{9,3}I_0}{I_0} = 9,3.$$

Jadi, gempa bumi tersebut memiliki kekuatan sebesar 9,3 skala Richter.

Setelah semua peserta didik mengerjakan Mari Mencoba 6.6, mintalah mereka mengerjakan Mari Mencoba 6.7 tentang pemodelan pengisian daya baterai.



Mari Mencoba 6.7

Alternatif Penyelesaian

Karena baterai tersebut akan diisi dayanya sampai 80% penuh, maka $C = 80\%C_0 = 0,8C_0$. Dengan demikian,

$$t = -\frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{C}{C_0} \right) = -\frac{1}{0,025} \ln \left(1 - \frac{0,8C_0}{C_0} \right) \approx 64,38$$

Jadi, waktu pengisian daya tersebut adalah sekitar 64,38 menit.

Pada contoh terakhir dari pemodelan fungsi logaritma, ajaklah peserta didik mengerjakan Mari Mencoba 6.8 tentang penyusutan harga barang.



Mari Mencoba 6.8

Alternatif Penyelesaian

Pemodelan harga mobil setiap saat t pada Contoh 6.8 adalah

$$H(t) = 200e^{\left(\frac{1}{4} \ln \frac{1}{2}\right)t} = 200e^{-0,173t}$$

Jadi, harga mobil setelah 20 tahun digunakan adalah $H(20) = 200e^{-0,173(20)} = 6,29$, yaitu sekitar 6 juta.

Mintalah beberapa peserta didik untuk mengomunikasikan jawabannya dan mintalah peserta didik lainnya untuk menanggapi jawaban. Pandulah diskusi ini agar Bapak/Ibu Guru dapat menyimpulkan pengetahuan mereka tentang pemodelan fungsi logaritma.

Subbab B: Fungsi Aljabar

Aktivitas 5

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menjelaskan definisi, menentukan daerah asal, daerah hasil, asimtot, dan menggambar grafik fungsi rasional. Peserta didik juga dapat menyelesaikan permasalahan kontekstual menggunakan fungsi rasional.

Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik mengenal fungsi rasional dengan mencermati permasalahan dalam kehidupan sehari-hari, yaitu tentang Petrus yang akan membuat kandang untuk ayam peliharaannya. Selanjutnya, Bapak/Ibu Guru menjelaskan Definisi 6.2. Untuk menjelaskan daerah asal dan daerah hasil fungsi rasional, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan Contoh 6.9.

Ajaklah peserta didik untuk membentuk kelompok kecil yang memungkinkan mereka dapat belajar secara efektif dan efisien. Setelah itu, mintalah setiap kelompok untuk berdiskusi saat mengerjakan soal Mari Mencoba 6.9.



Mari Mencoba 6.9

Alternatif Penyelesaian

Daerah asal fungsi rasional g adalah himpunan semua bilangan real yang tidak membuat penyebutnya sama dengan nol. Karena pembuat nol dari fungsi $x^2 - 1$ adalah -1 dan 1 , maka daerah asal fungsi rasional

g adalah himpunan semua bilangan real, kecuali -1 dan 1 atau dapat ditulis $D_g = \{x \mid x \neq 1, x \neq -1, x \in \mathbb{R}\}$.

Penentuan daerah hasil fungsi g adalah sebagai berikut.

Pertama-tama, kita menuliskannya $y = \frac{4x^2}{x^2 - 1}$, kemudian menyelesaikannya untuk x .

$$y = \frac{4x^2}{x^2 - 1} \quad \text{Persamaan fungsi rasional}$$

$$y(x^2 - 1) = 4x^2 \quad \text{Kalikan dengan } x^2 - 1$$

$$yx^2 - y = 4x^2 \quad \text{Sifat distributif}$$

$$yx^2 - 4x^2 = y \quad \text{Jumlahkan dengan } -4x^2 + y$$

$$x^2(y - 4) = y \quad \text{Faktorkan}$$

$$x^2 = \frac{y}{y - 4} \quad \text{Bagi dengan } y - 4$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{y}{y - 4}} \quad \text{Lakukan operasi akar}$$

$x = \pm \sqrt{\frac{y}{y - 4}}$ terdefinisi ketika:

(i) $y - 4 \neq 0$

$$y \neq 4$$

(ii) $\frac{y}{y - 4} \geq 0$

Syarat pertama agar $\frac{y}{y - 4} \geq 0$ adalah sebagai berikut.

- $y \geq 0$

- $y - 4 > 0$

$$y > 4$$

Irisan $y \geq 0$ dan $y > 4$ adalah $y > 4$.

Syarat kedua agar $\frac{y}{y - 4} \geq 0$ adalah sebagai berikut.

- $y \leq 0$

- $y - 4 < 0$

$$y < 4$$

Irisan $y \leq 0$ dan $y < 4$ adalah $y \leq 0$.

Gabungan dari syarat pertama dan syarat kedua adalah $y \leq 0$ atau $y > 4$.
 Jadi, berdasarkan irisan dari (i) dan (ii), diperoleh daerah hasil fungsi $g(x) = \frac{4x^2}{x^2 - 1}$ adalah $R_g = \{y | y \leq 0 \text{ atau } y > 4, y \in \mathbb{R}\}$.

Setelah mengerjakan soal Mari Mencoba 6.9, Bapak/Ibu Guru menjelaskan asimtot vertikal dan asimtot horizontal dari grafik $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ yang disediakan pada Buku Siswa. Gunakan Definisi 6.3 dan Definisi 6.4 untuk memberikan pengertian secara umum dari asimtot vertikal dan asimtot horizontal. Bapak/Ibu Guru dapat menjelaskan kepada peserta didik tentang cara menentukan asimtot vertikal dan asimtot horizontal dengan Contoh 6.10.

Berikan penjelasan kepada peserta didik bahwa beberapa fungsi rasional tidak memiliki asimtot vertikal ataupun asimtot horizontal, tetapi memiliki asimtot miring. Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan Definisi 6.5 untuk memberikan pengertian secara umum dari asimtot miring. Sebagai contoh asimtot miring, berikan penjelasan pada Contoh 6.10 nomor 3 bahwa garis $y = x + 6$ bukan garis horizontal sehingga fungsi h tidak memiliki asimtot horizontal, tetapi garis $y = x + 6$ merupakan asimtot miring fungsi h . Selanjutnya, ajaklah peserta didik mengerjakan soal Mari Mencoba 6.10 yang bersesuaian dengan Contoh 6.10.



Mari Mencoba 6.10

Alternatif Penyelesaian

1. Penyebut $x^2 - 16$ bernilai nol ketika $x = \pm 4$ dan pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut sehingga garis $x = -4$ dan $x = 4$ adalah asimtot vertikal fungsi f . Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, nilai $f(x)$ mendekati nol sehingga asimtot horizontal fungsi f adalah sumbu- x .

2. Penyebut $x + 2$ bernilai nol ketika $x = -2$ dan pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut sehingga garis $x = -2$ adalah asimtot vertikal fungsi g . Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, nilai $g(x)$ tidak mendekati nol. Oleh karena itu, kita mengubah fungsi tersebut menggunakan pembagian bersusun.

$$\begin{array}{r} 3 \\ x + 2 \overline{) 3x + 7} \\ \underline{3x + 6} \\ 1 \end{array}$$

Dari hasil pembagian bersusun tersebut, diperoleh

$$g(x) = 3 + \frac{1}{x + 2}$$

Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, nilai $\frac{1}{x + 2}$ mendekati nol. Dengan demikian, fungsi $g(x)$ akan mendekati 3 sehingga garis $y = 3$ merupakan asimtot horizontal fungsi g .

3. Penyebut $x + 1$ bernilai nol ketika $x = -1$ dan pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut sehingga garis $x = -1$ adalah asimtot vertikal fungsi h . Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, nilai $h(x)$ tidak mendekati nol. Oleh karena itu, kita mengubah fungsi tersebut menggunakan pembagian bersusun sehingga diperoleh

$$h(x) = 2x + 9 + \frac{6}{x + 1}$$

Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, nilai $\frac{6}{x + 1}$ mendekati nol. Dengan demikian, fungsi $g(x)$ akan mendekati $2x + 9$. Namun, garis $y = 2x + 9$ bukan garis horizontal sehingga fungsi h tidak memiliki asimtot horizontal, tetapi garis $y = 2x + 9$ merupakan asimtot miring fungsi h .

Peserta didik sudah mempelajari cara menentukan asimtot. Pemahaman peserta didik tentang asimtot akan digunakan untuk

menggambar grafik fungsi rasional. Ajaklah peserta didik untuk mencermati Contoh 6.11, kemudian mengerjakan Mari Mencoba 6.11 secara berkelompok.



Mari Mencoba 6.11

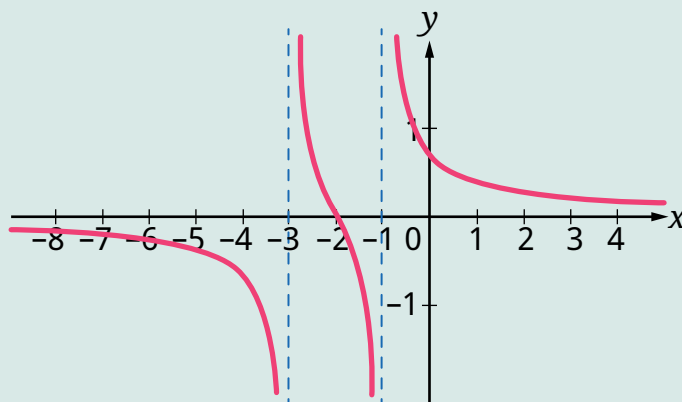
Alternatif Penyelesaian

Untuk menggambar grafik h , kita dapat melakukan langkah-langkah berikut.

1. Titik potong fungsi dengan sumbu- x dapat ditentukan dengan $y = 0$. Titik potong grafik fungsi h dengan sumbu- x adalah $(-2, 0)$.
2. Titik potong fungsi dengan sumbu- y dapat ditentukan dengan $x = 0$. Titik potong grafik fungsi h dengan sumbu- y adalah $[0, \frac{2}{3}]$.
3. Penyebut $x^2 + 4x + 3$ bernilai nol ketika $x = -1$ dan $x = -3$ serta pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut. Jadi, garis $x = -1$ dan $x = -3$ adalah asimtot vertikal fungsi h . Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, nilai $h(x)$ mendekati nol sehingga asimtot horizontal fungsi h adalah sumbu- x . Kita gambarkan asimtot-asimtot ini dengan garis putus-putus.
4. Untuk memudahkan menggambar, kita dapat menentukan titik bantu berupa pasangan berurutan yang memenuhi $h(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 3}$.

x	-5	-4	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	0	1	2
$y = h(x)$	-0,4	-0,7	0,7	0	-0,7	0,7	0,4	0,3

5. Gambar grafik fungsi $h(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 3}$ sebagai berikut.



Gambar 6.4 Grafik Fungsi h

Bapak/Ibu Guru dapat meminta beberapa kelompok untuk mempresentasikan jawabannya dan memberi kesempatan kepada peserta didik lain untuk menanggapi jawaban dari kelompok-kelompok presenter. Pandulah diskusi ini agar dapat memperoleh jawaban yang benar dari soal Mari Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 6.9, 6.10, dan 6.11 dengan tepat.

Pemahaman peserta didik tentang fungsi rasional akan digunakan untuk memodelkan dan menyelesaikan permasalahan kontekstual. Bapak/Ibu Guru mengajak peserta didik untuk memperhatikan informasi yang disajikan pada kolom Matematika dan Sains. Setelah itu, ajaklah peserta didik untuk melakukan kegiatan Eksplorasi.



Eksplorasi

Penerapan Fungsi Rasional

Alternatif Penyelesaian

1. Rumus gaya adalah sebagai berikut.

$$F = ma = m \frac{v}{t} = m \frac{s}{t^2}$$

Karena $m = 1.200$ kg, $s = 30$ m, dan x menyatakan waktu, maka fungsi besar gaya adalah $f(x) = \frac{36.000}{x^2}$.

2. Daerah asal fungsi rasional f adalah himpunan semua bilangan real yang tidak membuat penyebutnya sama dengan nol. Daerah asal fungsi rasional f adalah himpunan semua bilangan real, kecuali 0, atau dapat ditulis $D_f = \{x | x \neq 0, x \in \mathbb{R}\}$.

Penentuan daerah hasil fungsi f adalah sebagai berikut.

Pertama-tama, kita menuliskan $y = \frac{36.000}{x^2}$, kemudian menyelesaikannya untuk x .

$$y = \frac{36.000}{x^2}$$

$$x^2 y = 36.000 \quad \text{kalikan dengan } x^2$$

$$x^2 = \frac{36.000}{y} \quad \text{dibagi dengan } y$$

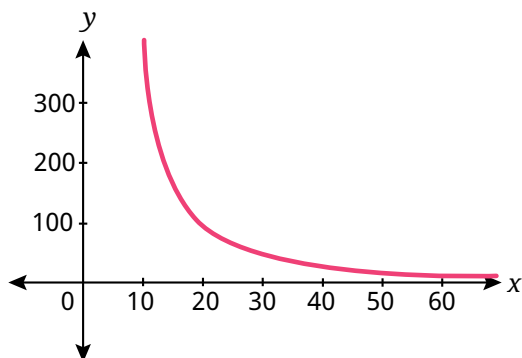
$$x = \pm \sqrt{\frac{36.000}{y}} \quad \text{lakukan operasi akar}$$

$x = \pm \sqrt{\frac{36.000}{y}}$ terdefinisi ketika $y > 0$. Jadi, daerah hasil fungsi $f(x) = \frac{36.000}{x^2}$ adalah $R_f = \{y | y > 0, y \in \mathbb{R}\}$.

3. Penyebut x^2 bernilai nol ketika $x = 0$ dan pembilang tidak memiliki faktor kembar dengan penyebut sehingga garis $x = 0$ adalah asimtot vertikal fungsi f . Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, nilai $f(x)$ mendekati nol sehingga asimtot horizontal fungsi f adalah sumbu- x . Jadi, fungsi f memiliki asimtot vertikal dan asimtot horizontal.
4. Pasangan berurutan yang memenuhi $f(x) = \frac{36.000}{x^2}$ sebagai berikut.

x	10	20	30	40	50	60
$y = f(x)$	360	90	40	22,5	14,4	10

5. Karena x adalah waktu, dan waktu tidak mungkin bernilai negatif, maka gambar grafik fungsi $f(x) = \frac{36.000}{x^2}$ sebagai berikut.



Gambar 6.5 Grafik Fungsi f

6. Dari grafik tersebut terlihat bahwa semakin besar gaya yang dikeluarkan, semakin kecil waktu yang dibutuhkan, bahkan hampir mendekati nol, tetapi tidak akan pernah nol, sedangkan semakin besar waktu yang dibutuhkan, semakin kecil gaya yang dikeluarkan, bahkan hampir mendekati nol, tetapi tidak akan pernah nol.

Mintalah beberapa kelompok untuk berbagi hasil diskusinya dan berikan kesempatan kepada peserta didik lain untuk menanggapi jawaban dari kelompok-kelompok presenter. Pandulah diskusi ini agar memperoleh penyelesaian kegiatan eksplorasi dengan tepat. Berikan penegasan bahwa selain pada bidang fisika, penerapan fungsi rasional juga dapat kita jumpai pada bidang ekonomi, penerapan jarak, kecepatan dan waktu, serta pada bidang olahraga. Untuk memodelkan dan menyelesaikan permasalahan-permasalahan tersebut, peserta didik harus memahami definisi, daerah asal, daerah hasil, asimtot, dan grafik fungsi rasional.

Aktivitas 6

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menjelaskan definisi, menentukan daerah asal, daerah hasil, dan menggambar grafik fungsi akar. Peserta didik juga dapat menyelesaikan permasalahan kontekstual menggunakan fungsi akar.

Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik mengenal fungsi akar dengan menggunakan teorema Pythagoras, kemudian menjelaskan Definisi 6.6. Berikan penegasan bahwa pada pembahasan fungsi akar ini, ruang lingkup bilangan yang dibahas adalah bilangan real. Bapak/Ibu Guru mengajak setiap kelompok berdiskusi untuk melakukan eksplorasi yang bertujuan menentukan daerah asal fungsi akar.



Eksplorasi

Eksplorasi Menentukan Daerah Asal Fungsi Akar

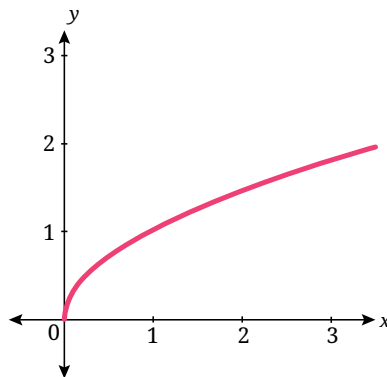
Alternatif Penyelesaian

● Fungsi $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Pasangan berurutan yang memenuhi fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ sebagai berikut.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	tidak terdefinisi	tidak terdefinisi	0	1	1,41	1,73

2. Gambar grafik fungsi f sebagai berikut.



Gambar 6.6 Grafik Fungsi f

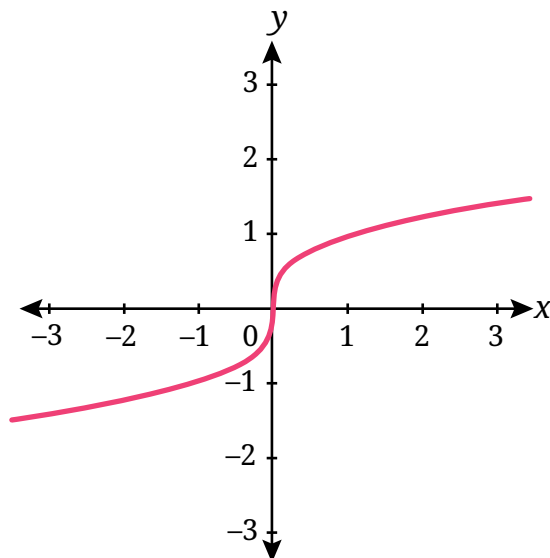
3. Dari gambar grafik, daerah asal fungsi f adalah himpunan semua bilangan real yang bernilai lebih dari atau sama dengan nol, atau dapat ditulis $D_f = \{x \mid x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$.

● Fungsi $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

1. Pasangan berurutan yang memenuhi fungsi $g(x) = \sqrt[3]{x}$ sebagai berikut.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = g(x)$	-1,26	-1	0	1	1,26	1,44

2. Gambar grafik fungsi g sebagai berikut.



Gambar 6.7 Grafik Fungsi g

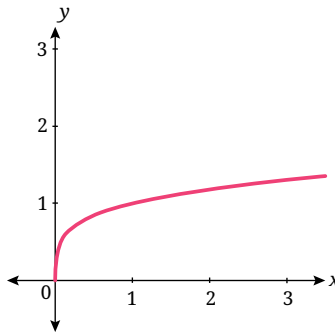
3. Dari gambar grafik, daerah asal fungsi g adalah himpunan semua bilangan real atau dapat ditulis $D_g = \{x | x \in \mathbb{R}\}$.

● Fungsi $h(x) = \sqrt[4]{x}$.

1. Pasangan berurutan yang memenuhi fungsi $h(x) = \sqrt[4]{x}$ sebagai berikut.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = h(x)$	tidak terdefinisi	tidak terdefinisi	0	1	1,19	1,32

2. Gambar grafik fungsi h sebagai berikut.



Gambar 6.8 Grafik Fungsi h

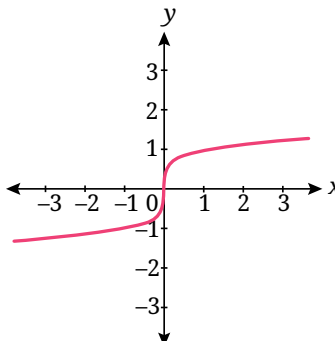
3. Dari gambar grafik, daerah asal fungsi h adalah himpunan semua bilangan real yang bernilai lebih dari atau sama dengan nol, atau dapat ditulis $D_h = \{x \mid x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$.

☉ Fungsi $p(x) = \sqrt[5]{x}$.

1. Pasangan berurutan yang memenuhi fungsi $p(x) = \sqrt[5]{x}$ sebagai berikut.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = p(x)$	-1,15	-1	0	1	1,15	1,25

2. Gambar grafik fungsi p sebagai berikut.



Gambar 6.9 Grafik Fungsi p

3. Dari gambar grafik, daerah asal fungsi p adalah himpunan semua bilangan real atau dapat ditulis $D_p = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Berdasarkan fungsi f , g , h , dan p , dugaannya sebagai berikut.

Jika diketahui fungsi $f(x) = \sqrt[n]{x}$ dengan n adalah bilangan bulat lebih dari 1, daerah asal fungsi f dapat diperoleh sebagai berikut.

- Jika nilai n genap ($n = 2, 4, 6, \dots$), maka daerah asal fungsi akar f mencakup semua bilangan real yang tidak menyebabkan $x < 0$.
- Jika nilai n ganjil ($n = 1, 3, 5, \dots$), maka daerah asal fungsi akar f mencakup semua bilangan real.

Pandulah diskusi ini agar Bapak/Ibu Guru dapat menyimpulkan pengetahuan mereka tentang cara menentukan daerah asal fungsi akar dengan tepat. Bapak/Ibu Guru dapat memberikan penegasan terhadap simpulan peserta didik bahwa:

Jika diketahui fungsi $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ dengan n adalah bilangan bulat lebih dari 1, daerah asal fungsi f dapat diperoleh sebagai berikut.

- Jika nilai n genap ($n = 2, 4, 6, \dots$), maka daerah asal fungsi akar f mencakup semua nilai pada daerah asal $g(x)$ yang tidak menyebabkan $g(x) < 0$.
- Jika nilai n ganjil ($n = 1, 3, 5, \dots$), maka daerah asal fungsi akar f mencakup semua nilai pada daerah asal $g(x)$.

Selanjutnya, ajaklah peserta didik untuk mencermati Contoh 6.12, kemudian mengerjakan Mari Mencoba 6.12 secara berkelompok.



Mari Mencoba 6.12

Alternatif Penyelesaian

Daerah asal fungsi akar g mencakup semua bilangan real yang tidak membuat $x - 2 = 0$ dan tidak menyebabkan $\frac{4}{x-2} < 0$. Untuk menentukan daerah asal fungsi g , hal yang dilakukan adalah sebagai berikut.

- a. Menemukan pembuat nol dari $x - 2$.

$$x - 2 = 0 \quad \text{pembuat nol } x - 2$$

$$x = 2 \quad \text{jumlahkan dengan 2}$$

b. Menemukan penyebab $\frac{4}{x-2} < 0$.

$$\frac{4}{x-2} < 0 \text{ ketika } x < 2.$$

Karena penyebab $x - 2$ sama dengan nol adalah $x = 2$ dan penyebab $\frac{4}{x-2} < 0$ adalah $x < 2$, maka daerah asal fungsi rasional g adalah himpunan semua bilangan real bernilai lebih dari 2 atau dapat ditulis $D_g = \{x | x > 2, x \in \mathbb{R}\}$. Adapun daerah hasil fungsi g adalah $R_g = \{y | y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$.

Setelah mengerjakan soal Mari Mencoba 6.12, Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan Contoh 6.13 untuk memberikan penjelasan kepada peserta didik mengenai langkah-langkah menggambar grafik fungsi akar. Ajaklah peserta didik untuk mengerjakan Mari Mencoba 6.13 secara berkelompok.



Mari Mencoba 6.13

Alternatif Penyelesaian

1. Kita dapat menggambar grafik fungsi $g(x) = \sqrt{x} - 5$ dengan melakukan langkah-langkah berikut.

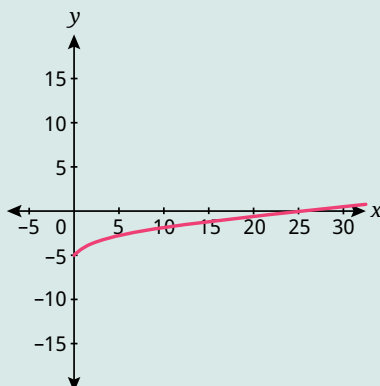
i) Menentukan daerah asal fungsi g .

Daerah asal fungsi akar g mencakup semua bilangan real yang tidak menyebabkan $x < 0$. Dengan demikian, daerah asal fungsi g adalah himpunan semua bilangan real yang bernilai lebih dari atau sama dengan 0, atau dapat ditulis $D_g = \{x | x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$.

ii) Daerah asal fungsi g dapat memudahkan kita untuk menentukan titik bantu yang merupakan pasangan berurutan $(x, g(x))$ yang memenuhi $g(x) = \sqrt{x} - 5$.

x	0	1	4	9	16	25	36
$y = g(x)$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1

iii) Gambar grafik fungsi $g(x) = \sqrt{x} - 5$ sebagai berikut.



Gambar 6.10 Grafik Fungsi Akar g

2. Kita dapat menggambar grafik fungsi $h(x) = \sqrt[3]{x-1}$ dengan melakukan langkah-langkah berikut.

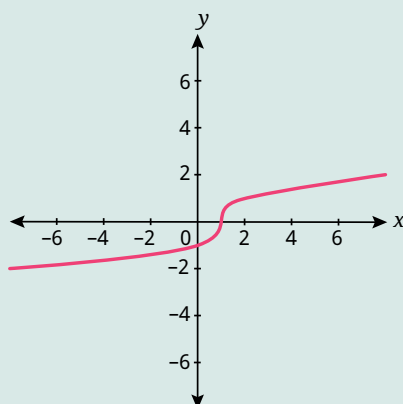
i) Menentukan daerah asal fungsi h .

Daerah asal fungsi akar h mencakup semua bilangan real atau dapat ditulis $D_h = \{x | x \in \mathbb{R}\}$.

ii) Daerah asal fungsi h dapat memudahkan kita untuk menentukan titik bantu yang merupakan pasangan berurutan $(x, h(x))$ yang memenuhi $h(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = h(x)$	-1,44	-1,26	-1	0	1	1,26	1,44

iii) Gambar grafik fungsi $h(x) = \sqrt[3]{x-1}$ sebagai berikut.



Gambar 6.11 Grafik Fungsi Akar h

Bapak/Ibu Guru dapat memandu diskusi ini agar dapat memperoleh jawaban yang benar dari soal Mari Mencoba yang bersesuaian dengan Contoh 6.12 dan Contoh 6.13 dengan tepat.

Pemahaman peserta didik tentang fungsi akar akan digunakan untuk memodelkan dan menyelesaikan permasalahan kontekstual. Bapak/Ibu Guru dapat mengajak peserta didik untuk memperhatikan informasi yang disajikan pada kolom Matematika dan Sains. Setelah itu, ajaklah peserta didik untuk melakukan Eksplorasi.



Eksplorasi

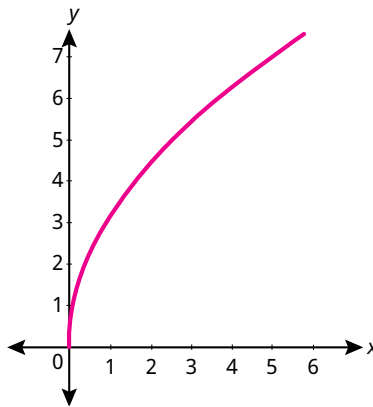
Penerapan Fungsi Akar

Alternatif Penyelesaian

1. Jika f merupakan fungsi kecepatan tsunami dan x menyatakan kedalaman laut, maka $f(x) = \sqrt{9,8x}$.
2. Daerah asal fungsi akar f mencakup semua bilangan real yang tidak menyebabkan $x < 0$. Dengan demikian, daerah asal fungsi f adalah himpunan semua bilangan real bernilai lebih dari atau sama dengan 0, atau dapat ditulis $D_f = \{x | x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$. Adapun daerah hasil fungsi f adalah $R_f = \{y | y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$.
3. Daerah asal fungsi f dapat memudahkan kita untuk menentukan titik bantu yang merupakan pasangan berurutan $(x, f(x))$ yang memenuhi $f(x) = \sqrt{9,8x}$.

x	0	1	2	3	4	5
$y = f(x)$	0	3,1	4,4	5,4	6,3	7

Gambar grafik fungsi $f(x) = \sqrt{9,8x}$ sebagai berikut.



Gambar 6.12 Grafik Fungsi Akar f

4. Interpretasi hasil pengamatan grafik fungsi f adalah semakin dalam kedalaman laut, semakin besar kecepatan tsunami.
5. $f(3.000) = \sqrt{9,8(3.000)} = 171,5$. Jadi, kecepatan tsunami jika kedalaman laut 3.000 m adalah 171,5 m/s.

Pandulah diskusi ini agar memperoleh penyelesaian kegiatan eksplorasi dengan tepat. Berikan penegasan bahwa selain pada bidang fisika, penerapan fungsi akar digunakan untuk memperkirakan jarak sebuah benda ke horizon. Untuk memodelkan dan menyelesaikan permasalahan-permasalahan tersebut, peserta didik harus memahami definisi, daerah asal, daerah hasil, dan grafik fungsi akar.

Subbab C: Fungsi Non-aljabar

Aktivitas 7

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menyelesaikan permasalahan kontekstual menggunakan fungsi eksponensial.

Untuk mengawali aktivitas ini, peserta didik dapat diajak untuk mengingat kembali ide-ide besar tentang fungsi eksponensial yang dipelajari di kelas X. Setelah itu, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok beranggotakan 3 atau 4 orang per kelompok. Mintalah setiap kelompok tersebut mengerjakan Mari Mencoba 6.14. Selama mereka mengerjakannya, Bapak/Ibu Guru memantau pekerjaan kelompok dan mencatat hal-hal penting selama dinamika kelompok.



Mari Mencoba 6.14

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan informasi pada soal, kita memperoleh bahwa $J_0 = 50$ dan $t = 5$. Kita dapat menentukan banyak bakteri pada menit ke-5 menggunakan model fungsi eksponensial yang diberikan, yakni

$$f(5) = J_0(3^t) = 50(3^5) = 50(243) = 12.150$$

Jadi, banyak bakteri pada menit ke-5 adalah 12.150.

Aktivitas 8

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menjelaskan definisi dan menggambar grafik fungsi nilai mutlak. Peserta didik juga dapat menyelesaikan permasalahan kontekstual menggunakan fungsi nilai mutlak.

Bapak/Ibu Guru dapat memulai Aktivitas 8 dengan mengajak peserta didik menyelidiki karakteristik fungsi nilai mutlak baik secara notasi simbolik maupun grafik di dalam bidang koordinat. Setelah itu, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok dan tugaskan setiap kelompok untuk mengerjakan dua aktivitas Mari Mencoba. Ketika peserta didik mengerjakan kedua aktivitas tersebut, Bapak/Ibu Guru perlu berkeliling dari satu kelompok ke kelompok lainnya untuk memantau dan mendampingi pekerjaan setiap kelompok.



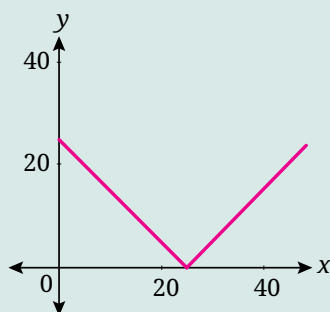
Mari Mencoba 6.15

Alternatif Penyelesaian

1. Rudi menjauh dari rumah selama perjalanan. Di sisi lain, ia mendekat ke warung Padang dan kemudian menjauh.

Jarak Rudi ke rumah	0	10	20	25	30	40	50
Jarak Rudi ke warung Padang	25	15	5	0	5	15	25

2. Misalkan jarak Rudi ke rumahnya adalah x dan jarak Rudi ke warung Padang adalah y . Grafik dari hubungan keduanya dapat diilustrasikan sebagai berikut.



Gambar 6.13 Grafik Perjalanan Rudi

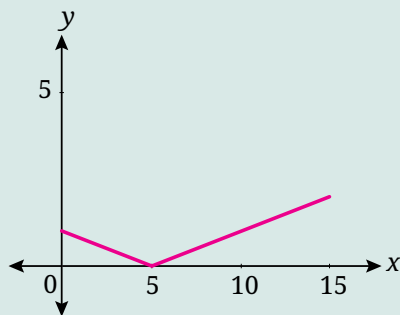
3. Fungsi yang dapat merepresentasikan hubungan tersebut dapat dinyatakan sebagai $f(x) = |x - 25|$. Namun, perlu diperhatikan bahwa nilai x terbatas untuk $0 \leq x \leq 50$.



Mari Mencoba 6.16

Alternatif Penyelesaian

Masalah pada soal dapat diilustrasikan pada bidang Kartesius seperti berikut.



Gambar 6.14 Pemantulan Sinar pada Bidang Kartesius

Karena titik puncaknya adalah $(h, k) = (5, 0)$, dengan metode substitusi, kita memperoleh

$$f(x) = a|x - 5| + 0 = a|x - 5|$$

Selanjutnya, karena $(0, 1)$ berada pada garis, kita memperoleh

$$1 = a|0 - 5| \leftrightarrow a = \frac{1}{5}$$

Oleh karena itu, persamaan nilai mutlak yang diinginkan adalah $f(x) = \frac{1}{5}|x - 5|$. Berdasarkan persamaan tersebut, kita dapat menentukan pada ketinggian berapa sinar lampu mencapai tembok dengan cara mensubstitusikan $x = 15$ ke dalam fungsi. Akibatnya, diperoleh $f(15) = \frac{1}{5}|15 - 5| = 2$. Jadi, tinggi pantulan sinar di tembok adalah 2 m.

Setelah setiap kelompok menyelesaikan pekerjaannya, Bapak/Ibu Guru dapat memilih beberapa kelompok untuk mempresentasikan hasil pekerjaannya. Setelah presentasi, ajaklah peserta didik mendiskusikan jawaban dari presenter tersebut. Peran Bapak/Ibu Guru di sini adalah mengarahkan diskusi agar berjalan secara produktif. Jika perlu, Bapak/Ibu Guru dapat meluruskan miskonsepsi yang dialami peserta didik.

Aktivitas 9

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menjelaskan definisi dan menggambar grafik fungsi tangga. Peserta didik juga dapat menyelesaikan permasalahan kontekstual menggunakan fungsi tangga.

Bapak/Ibu Guru dapat memulai aktivitas dengan menjelaskan pengertian dari fungsi tangga. Penjelasan dapat mengacu pada Buku Siswa dan beberapa contohnya. Untuk penambahan, dapat dielaborasi oleh Bapak/Ibu Guru.

Selanjutnya, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik untuk berpasangan dan mengerjakan Mari Mencoba 6.17 yang bersesuaian dengan Contoh 6.17. Selama proses pengerjaan, berkunjunglah ke bangku peserta didik untuk memantau dan memberikan topangan yang diperlukan.

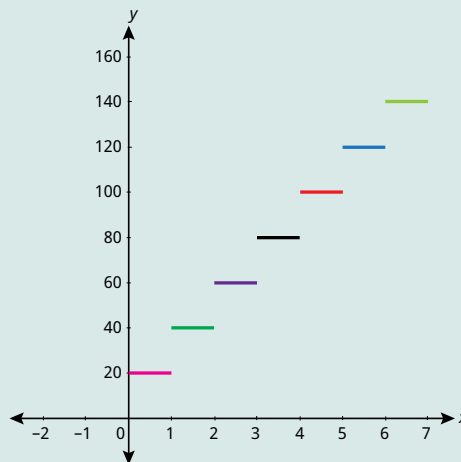


Alternatif Penyelesaian

1. Berdasarkan informasi pada soal, kita dapat membuat tabel sederhana untuk waktu (dalam jam) dan besar biaya penyewaan konsol permainan (dalam ribu rupiah).

Waktu	0	1	2	3	4	5	6	7
Biaya	0	20	40	60	80	100	120	140

2. Grafik dari permasalahan tersebut adalah sebagai berikut.
 - Sumbu-x menyatakan waktu menyewa (dalam jam).
 - Sumbu-y menyatakan biaya menyewa (dalam ribu rupiah).



Gambar 6.15 Grafik Biaya Menyewa Konsol Permainan

3. Fungsi yang dapat merepresentasikan fenomena di atas adalah fungsi tangga dengan notasi berikut:

$$f(x) = 20k, k - 1 < x \leq k, k = 1, 2, 3, \dots$$

4. Untuk menentukan berapa jam Andi dapat menyewa konsol permainan dengan uang 125 ribu rupiah, kita dapat mengalkulasikan dengan

$$20k \leq 125 \leftrightarrow k \leq \frac{125}{20} = 6,25$$

Karena k harus berupa bilangan bulat, nilai k paling besar adalah 6. Artinya, maksimal Andi dapat menyewa selama 6 jam.

Aktivitas 10

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat menjelaskan definisi dan menggambar grafik fungsi sesepenggal. Peserta didik juga dapat menyelesaikan permasalahan kontekstual menggunakan fungsi sesepenggal.

Untuk memulai aktivitas ini, peserta didik dapat dikenalkan dengan Definisi 6.10 yang terdapat pada Buku Siswa. Setelah itu, bagilah peserta didik menjadi beberapa kelompok untuk membahas definisi tersebut lebih lanjut dengan meminta mereka membuat beberapa contoh beserta grafiknya.

Bapak/Ibu Guru dapat menugaskan setiap kelompok mengerjakan Mari Mencoba 6.18. Selama proses pengerjaan, Bapak/Ibu Guru sebaiknya mengunjungi setiap kelompok untuk memantau dan memberikan topangan yang diperlukan.



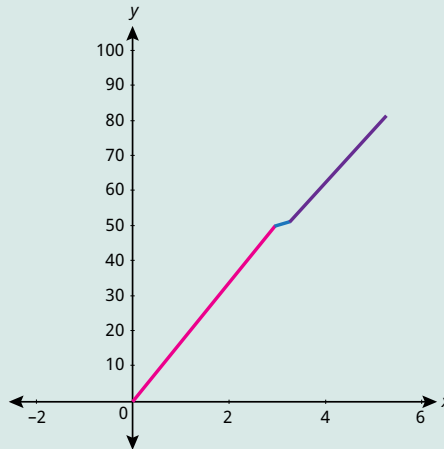
Mari Mencoba 6.18

Alternatif Penyelesaian

1. Berdasarkan informasi pada soal, berikut ini adalah tabel lengkapnya.

Kegiatan	Waktu Tempuh	Jarak Tempuh	Kecepatan
Bersepeda	3 jam	50 km	$\frac{50}{3}$ km/jam
Berenang	0,25 jam	1 km	4 km/jam
Berlari	2 jam	30 m	15 km/jam

2. Grafik yang terkait adalah sebagai berikut.



Gambar 6.16 Grafik Perjalanan Surya

3. Fungsi total jarak tempuh terhadap waktu tempuh adalah sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{50}{3}x, & 0 \leq x \leq 3 \\ 4x + 38, & 3 < x \leq 3,25 \\ 15x + 2,25, & 3,25 < x \leq 5,25 \end{cases}$$

Jika memungkinkan, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan aktivitas interaktif yang berjudul “Jelajah Kepulauan Raja Ampat”. Berikut alternatif pembelajarannya.

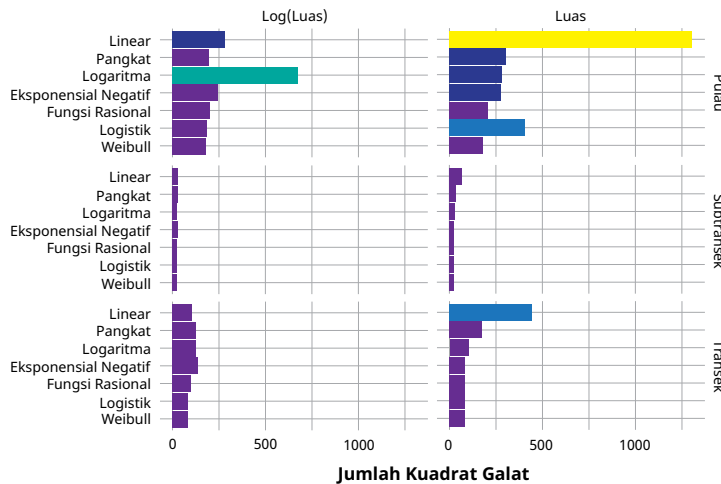
Alternatif Pembelajaran

Ajaklah peserta didik untuk menjelajahi keanekaragaman hayati di Kepulauan Raja Ampat melalui media pembelajaran digital melalui alamat <https://s.id/jelajah-raja-ampat> atau dengan memindai kode respons cepat pada Buku Siswa. Melalui media pembelajaran tersebut, mereka diminta untuk memodelkan banyaknya spesies tanaman berkayu sebagai fungsi terhadap luas wilayah.



Alternatif penyelesaian untuk kedua pertanyaan pada Buku Siswa menggunakan tingkat analisis pulau, yaitu sebagai berikut.

1. Untuk tingkat analisis pulau, transek, dan subtransek, model terbaiknya secara berturut-turut adalah fungsi Weibull dengan transformasi variabel luas, fungsi logistik dengan transformasi variabel luas, dan fungsi Weibull tanpa transformasi variabel luas.
2. Strategi yang digunakan adalah dengan menghitung dan membandingkan jumlah kuadrat galat. Jumlah kuadrat galat untuk tiap-tiap model disajikan pada gambar berikut.



Gambar 6.17 Jumlah Kuadrat Galat

Berdasarkan gambar tersebut, model yang baik ditunjukkan dengan jumlah kuadrat galat yang kecil.

Sebagai catatan, jumlah kuadrat galat (SSE, *sum of squares error*) merupakan salah satu strategi untuk menentukan model mana yang lebih baik daripada model lainnya. Peserta didik dapat menggunakan cara lain, misalnya menggunakan akar kuadrat dari rerata kuadrat galat (RMSE, *root mean square error*). Selain itu, peserta didik mungkin menggunakan metode yang lebih intuitif, yaitu metode visual. Dengan metode ini, mereka menggunakan diagram pencar, serta visualisasi model dan galatnya untuk menilai baik atau tidaknya sebuah model. Selengkapnya dapat Bapak/Ibu Guru temukan pada tautan <https://s.id/mat-raja-ampat> atau dengan memindai kode respons cepat di samping.



F. Tindak Lanjut

Kegiatan tindak lanjut dapat berupa remedial untuk memperdalam materi yang belum dipahami peserta didik, serta pengayaan untuk mengembangkan materi yang sudah dipahami. Oleh karena itu, Bapak/Ibu Guru dapat meminta peserta didik untuk mengerjakan soal latihan pada setiap subbab dengan tujuan mengetahui ketercapaian tujuan pembelajaran. Bagi peserta didik yang kesulitan memahami materi fungsi dan pemodelannya, Bapak/Ibu Guru dapat memberikan remedial dan menggunakan strategi pembelajaran yang berbeda dengan pembelajaran sebelumnya. Selain itu, berikanlah latihan soal yang mempunyai tingkat kesulitan sama dengan contoh soal.

Bapak/Ibu Guru juga dapat memberikan pengayaan kepada peserta didik yang sudah memahami materi dengan baik dan cepat. Bapak/Ibu Guru dapat memberikan pengayaan yang tersaji pada Buku Siswa. Selain itu, pengayaan juga dapat berupa pengembangan model-model penerapan fungsi aljabar dan non-aljabar dalam penyelesaian permasalahan sehari-hari.

G. Asesmen Sumatif

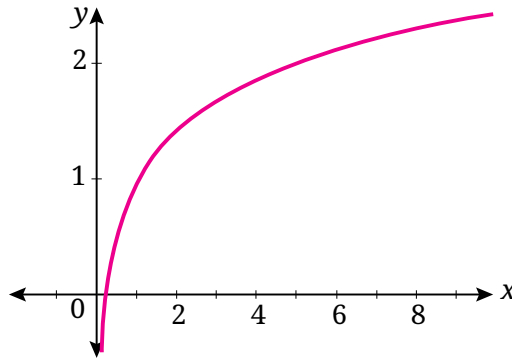
Bapak/Ibu Guru dapat menggunakan soal-soal Uji Kompetensi dan Proyek pada Buku Siswa sebagai penilaian sumatif. Bapak/Ibu Guru dapat mendesain rubrik penilaian secara mandiri dan sesuai dengan kebutuhan. Dalam mendesain rubrik tersebut, Bapak/Ibu Guru dapat mengacu pada bagian Kunci Jawaban.

H. Kunci Jawaban

1. Latihan A Fungsi Logaritma

Alternatif Penyelesaian

1. $\{x \mid x > 0\}; \mathbb{R}$
2. basis 5; $f(1) = 0$, $f(5) = 1$, dan $f(25) = 2$
3. Sketsa grafik fungsi $g(x) = ({}^5\log x) + 1$ adalah sebagai berikut.



Daerah asal $\{x \mid x > 0\}$, daerah hasil $\mathbb{R}$, dan asimtot tegaknya sumbu- y .

4. pengurangan; ${}^5\log\left(\frac{2.013}{3}\right) = {}^5\log 2.013 - {}^5\log 3$
5. Salah
6. Intensitas gempa bumi yang terjadi di Aceh $\frac{10^{9,3}}{10^{7,3}} = 10^2 = 100$ kali lipat dari yang terjadi di Tasikmalaya. Dengan kata lain, intensitas gempa bumi yang terjadi di Tasikmalaya $\frac{1}{100}$ kali gempa bumi di Aceh.
7. Nilai pH jus jeruk adalah $\text{pH} = -\log(10^{-3,15}) = -(-3,15) \log 10 = 3,15(1) = 3,15$. Jadi, nilai pH jus jeruk tersebut adalah 3,15.
8. $\ln\left(\frac{P}{100}\right) = -\frac{h}{7}$ maka $\ln\left(\frac{P}{100}\right) = -\frac{4,884}{7}$. Akibatnya, $P = 100e^{-0,6977} \approx 49,77$. Jadi, tekanan udara di daerah tersebut adalah sekitar 49,77 kPa.
9. Ketinggian yang cocok dengan tubuh manusia adalah $h \leq 14,9$ km. Untuk menentukan tekanan yang masih cocok dengan manusia, kita selesaikan pertidaksamaan $\ln\left(\frac{P}{100}\right) \geq -\frac{14,9}{7}$. Dengan memanfaatkan sifat logaritma, diperoleh $P \geq 100e^{\frac{-14,9}{7}} \approx 11,9$. Jadi, tekanan atmosfer yang aman bagi manusia minimal 11,9 kPa.
10. Waktu yang diperlukan agar populasinya mencapai sejuta bakteri adalah

$$t = 2 \frac{\log\left(\frac{1.000.000}{50}\right)}{\log 2} \approx 28,57 \text{ jam}$$

2. Latihan B Fungsi Aljabar

Alternatif Penyelesaian

1. Salah. Pembilang dan penyebut tidak memiliki faktor persekutuan.
2. Benar
3. Benar
4. Benar

5. a. Daerah asal fungsi rasional f adalah himpunan semua bilangan real yang tidak membuat penyebutnya sama dengan nol. Dengan demikian, daerah asal fungsi rasional f adalah himpunan semua bilangan real, kecuali -15 atau dapat ditulis $D_f = \{x \mid x \neq -15, x \in \mathbb{R}\}$. Penentuan daerah hasil fungsi f adalah sebagai berikut.

Pertama-tama, kita menuliskan $y = \frac{7+x}{15+x}$, kemudian menyelesaikannya untuk x .

$$y = \frac{7+x}{15+x} \quad \text{Persamaan fungsi rasional}$$

$$y(15+x) = 7+x \quad \text{Kalikan dengan } 15+x$$

$$15y + xy = 7+x \quad \text{Sifat distributif}$$

$$xy - x = 7 - 15y \quad \text{Jumlahkan dengan } -x - 15y$$

$$x(y-1) = 7 - 15y \quad \text{Sifat distributif}$$

$$x = \frac{7-15y}{y-1} \quad \text{Bagi dengan } y-1$$

$x = \frac{7-15y}{y-1}$ tidak terdefinisi ketika $y = 1$ sehingga daerah hasil

fungsi $f(x) = \frac{7+x}{15+x}$ adalah $R_f = \{y \mid y \neq 1, y \in \mathbb{R}\}$.

- b. Daerah asal fungsi akar g mencakup semua bilangan real atau dapat ditulis $D_g = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$. Daerah hasil fungsi g adalah $R_g = \{y \mid y \in \mathbb{R}\}$.

6. Diketahui fungsi $p(x) = \frac{x^5 + x^4 + x^2 + 1}{x^4 + 3}$. Kita mengubah fungsi tersebut menggunakan pembagian bersusun sehingga diperoleh

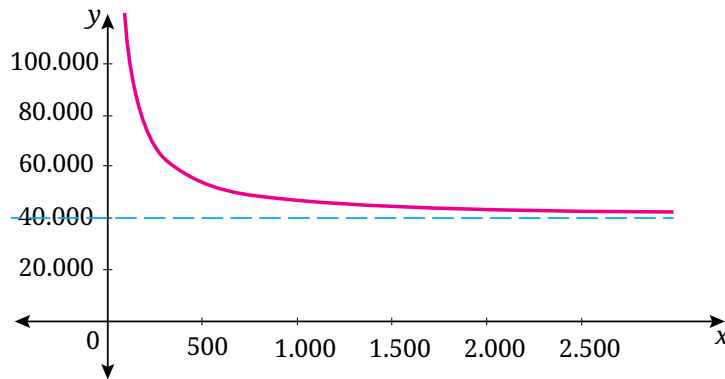
$$p(x) = x + 1 + \frac{x^2 - 3x - 2}{x^4 + 3}$$

Jika nilai x mendekati positif tak hingga atau mendekati negatif tak hingga, nilai $\frac{x^2 - 3x - 2}{x^4 + 3}$ mendekati nol. Jadi, garis $y = x + 1$ merupakan asimtot miring fungsi p .

7. a. Model matematika dari fungsi biaya untuk memproduksi x loyang kue bronis adalah $B(x) = 7.000.000 + 40.000x$.
- b. Misalkan fungsi biaya rata-rata B untuk memproduksi x loyang kue bronis adalah fungsi Q , maka $Q(x) = \frac{7.000.000 + 40.000x}{x}$.
- c. Kita dapat menggambar grafik fungsi $Q(x) = \frac{7.000.000 + 40.000x}{x}$ dengan langkah-langkah berikut.
- Titik potong fungsi dengan sumbu- x dapat ditentukan dengan $y = 0$. Titik potong grafik fungsi Q dengan sumbu- x adalah $(-175, 0)$.
 - Garis $x = 0$ adalah asimtot vertikal fungsi Q , sedangkan asimtot horizontal fungsi Q adalah garis $y = 40.000$. Kita gambar asimtot-asimtot ini dengan menggunakan garis putus-putus.
 - Untuk memudahkan menggambar, kita dapat menentukan titik bantu yang merupakan pasangan berurutan yang memenuhi $Q(x) = \frac{7.000.000 + 40.000x}{x}$.

x	500	1.000	1.500	2.000	2.500	3.000
$y = Q(x)$	54.000	47.000	44.666,7	43.500	42.800	42.333,3

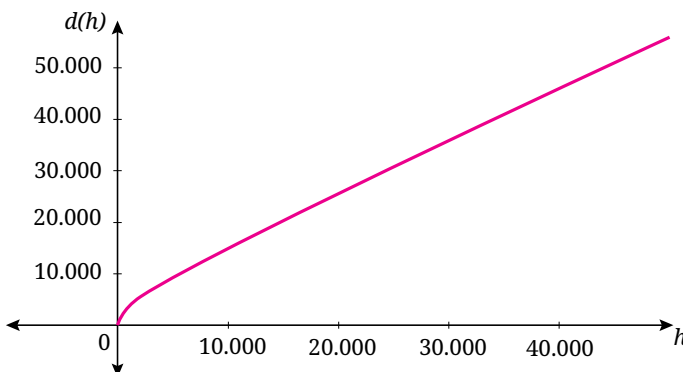
- iv. Gambar grafik fungsi $Q(x) = \frac{7.000.000 + 40.000x}{x}$ adalah sebagai berikut.



8. a. Fungsi jarak d (dalam km) ke horizon untuk sebuah benda yang berada pada ketinggian h km di atas permukaan bumi adalah $d(h) = \sqrt{(h + 6.371)^2 - 6.371^2} = \sqrt{h^2 + 12.742h}$.
- b. Daerah asal fungsi akar d mencakup semua bilangan real yang tidak menyebabkan $h^2 + 12.742h < 0$. Selain itu, karena h merupakan ketinggian, daerah asal fungsi rasional d adalah himpunan semua bilangan real bernilai lebih dari atau sama dengan 0, atau dapat ditulis $D_d = \{h \mid h \geq 0, h \in \mathbb{R}\}$. Adapun daerah hasil fungsi d adalah $R_d = \{y \mid y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$.
- c. Daerah asal fungsi d dapat memudahkan kita untuk menentukan titik bantu yang merupakan pasangan berurutan $(h, f(h))$ yang memenuhi $d(h) = \sqrt{h^2 + 12.742h}$.

h	0	10.000	20.000	30.000	40.000
$y = d(h)$	0	15.080,45	25.589,84	35.808,66	45.931,25

Gambar grafik fungsi $d(h) = \sqrt{h^2 + 12.742h}$ sebagai berikut.

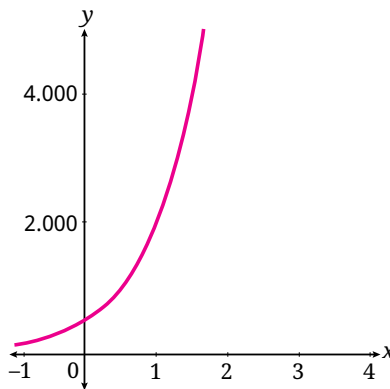


- d. $d(1.000) = \sqrt{(1.000)^2 + 12.742(1.000)} = 3.707,02$. Jadi, jarak benda ke horizon pada benda yang terletak 1.000 km di atas permukaan bumi adalah 3.707,02 km.

3. Latihan C Fungsi Non-aljabar

Alternatif Penyelesaian

1. Salah
2. Benar
3.
 - a. $500 \times 2^6 = 32.000$
 - b. 500×2^{2t}
 - c. $500 \times 2^{z(\frac{2}{3})} \approx 1.260$
 - d. Grafik fungsi populasi bakteri sebagai berikut.

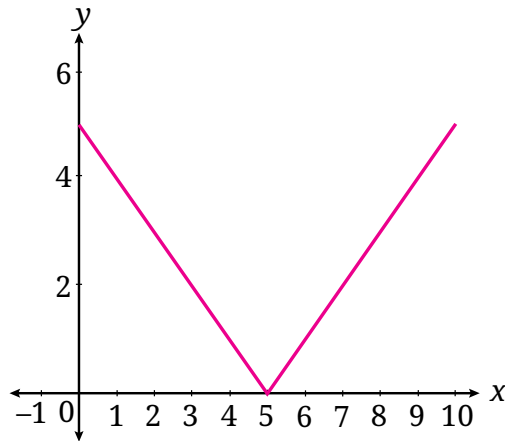


Estimasi waktu yang dibutuhkan adalah ${}^4\log 200$.

4.
 - a. Tabel jarak Made ke rumah dan ke restoran Singkawang sebagai berikut.

Jarak Made ke rumah	0	2,5	5	7,5	10
Jarak Made ke restoran Singkawang	5	2,5	0	2,5	5

- b. Grafik perjalanan Made sebagai berikut.

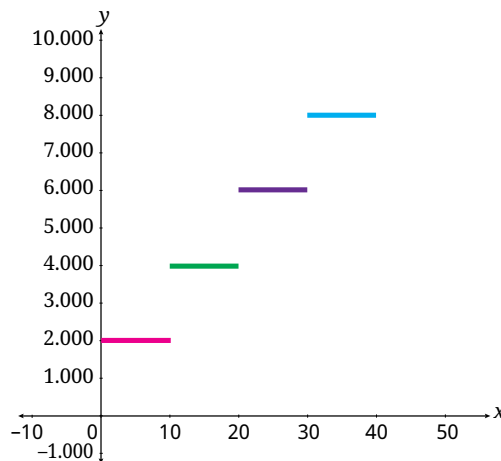


c. $f(x) = |x - 5|, 0 \leq x \leq 10$

5. a. Tabel yang sesuai sebagai berikut.

Menit	0	10	20	30	40
Biaya	0	2.000	4.000	6.000	8.000

b. Grafik yang sesuai sebagai berikut.



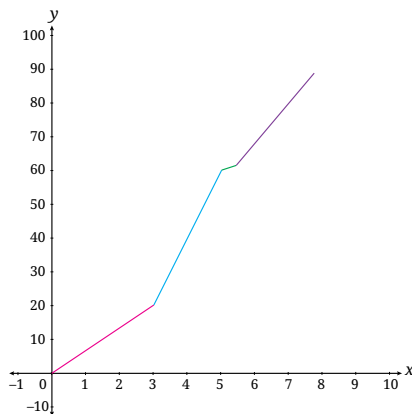
c. $f(x) = 2.000k, 10(k - 1) < x \leq 10k, k = 1, 2, 3, \dots$

d. Lama penyewaan dengan uang 300 ribu rupiah adalah 150 menit (2,5 jam) sehingga uang tersebut tidak cukup untuk menghabiskan waktu selama 5 jam di warnet.

6. a.

Kegiatan	Waktu Tempuh	Jarak Tempuh	Kecepatan
Kayak	3 jam	20 km	$\frac{20}{3}$ km/jam
Bersepeda	2 jam	40 km	20 km/jam
Berenang	$\frac{1}{3}$ jam	1 km	3 km/jam
Berlari	2,5 jam	25 km	10 km/jam

b. Grafik yang sesuai sebagai berikut.



c. Fungsi total jarak tempuh terhadap waktu tempuh sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20}{3}x, & 0 \leq x \leq 3 \\ 20x - 40, & 3 < x \leq 5 \\ 3x + 45, & 5 < x \leq 5 + \frac{1}{3} \\ 10x + \frac{23}{3}, & 5 + \frac{1}{3} < x \leq 7,5 + \frac{1}{3} \end{cases}$$

4. Uji Kompetensi

1. Benar
2. Benar
3. Salah. Fenomena tersebut menggambarkan pertumbuhan secara linear.

4. $\{x | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$; daerah hasil $\mathbb{R}$

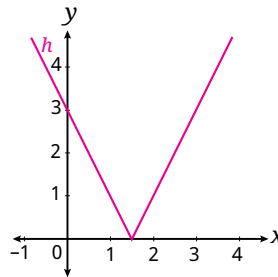
5. $g(x) \geq 0$

6. Contoh fungsi sesepenggal:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

7. $D_f = \{x | x \leq 2 \text{ dan } x \geq 2, x \in \mathbb{R}\}$

8. Grafik h sebagai berikut.



9. Waktu yang diperlukan agar suhu kopi menjadi 75°C adalah

$$t = 20 \log \left(\frac{75}{60 - 25} \right) \approx 6,62 \text{ menit}$$

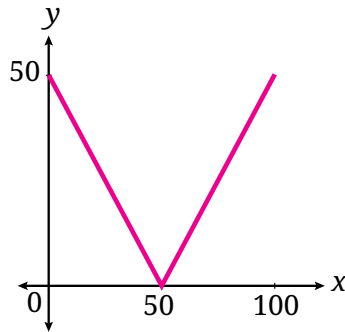
10. a. Model matematika untuk waktu yang dibutuhkan Nyoman dalam menempuh perjalanan pertama adalah $w_1 = \frac{25}{x}$.

b. Model matematika untuk waktu yang dibutuhkan Nyoman dalam menyelesaikan setengah perjalanan selanjutnya adalah $w_2 = \frac{25}{x - 15}$.

11. a. Tabelnya sebagai berikut.

Jarak Aang dari awal lintasan	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Jarak Aang ke fotografer	50	40	30	20	10	0	10	20	30	40	50

b. Grafik yang sesuai sebagai berikut.



c. $f(x) = |x - 50|, 0 \leq x \leq 100$

12. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} {}^a\log \frac{a}{b} + {}^b\log \frac{b}{a} &= {}^a\log a - {}^a\log b + {}^b\log b - {}^b\log a \\ &= 2 - ({}^a\log b + {}^b\log a) \\ &= 2 - \left({}^a\log b + \frac{1}{{}^a\log b} \right) \end{aligned}$$

Karena $a \geq b > 1$, maka diperoleh ${}^a\log b > 0$ sehingga

$$\left({}^a\log b + \frac{1}{{}^a\log b} \right) \geq 2$$

Dengan demikian,

$${}^a\log \frac{a}{b} + {}^b\log \frac{b}{a} = 2 - \left({}^a\log b + \frac{1}{{}^a\log b} \right) \leq 2 - 2 = 0$$

Jadi, nilai terbesar dari ${}^a\log \frac{a}{b} + {}^b\log \frac{b}{a}$ adalah 0.

13. Langkah pertama adalah memfaktorkan pembilang dan penyebut fungsi rasional.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x+2)^k(x^2-1)}{(x^2+x-2)(x^2+3x+2)} \\ &= \frac{(x+2)^k(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)(x+2)(x+1)} \\ &= \frac{(x+2)^k}{(x+2)(x+2)} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa pembilang dan penyebut akan memiliki faktor yang sama untuk $k \geq 1$. Agar fungsi f memiliki satu asimtot vertikal maka $k = 1$.

14. Pembuktiannya sebagai berikut.

- Jika $a > 1$ dan $x < y$, maka $a^{x-y} < 1$. Akibatnya, $\frac{a^x}{a^y} < 1 \leftrightarrow a^x < a^y$. Oleh karena itu, $f(x) = a^x$ adalah fungsi naik jika $a > 1$.
- Jika $a = 1$, maka $f(x) = 1^x = 1$ yang merupakan fungsi konstan.
- Jika $0 < a < 1$ dan $x < y$, maka $a^{x-y} > 1$. Akibatnya, $\frac{a^x}{a^y} > 1 \leftrightarrow a^x > a^y$. Oleh karena itu, $f(x) = a^x$ adalah fungsi turun jika $a < 1$.

5. Proyek: Prediksi Banyak Penduduk



Proyek

Untuk kunci Proyek ini, silakan merujuk ke laman Desmos yang dapat diakses melalui pranala <https://s.id/KunciProyekBab6> atau kode respons cepat di samping.



Alternatif penyelesaian:

1. Semakin bertambahnya tahun, populasi penduduk di semua daerah semakin bertambah dan pertumbuhannya sangat cepat.
2. Silakan merujuk ke laman Desmos.
3. Fungsi eksponensial
4. Silakan merujuk ke laman Desmos.
5. Silakan merujuk ke laman Desmos.
6. Silakan merujuk ke laman Desmos. Berdasarkan grafik di Desmos, prediksi dapat dilihat pada tabel berikut.

Kota/Kabupaten	2025	2030	2050
Jemberana	322.972	341.779	428.611
Tabanan	474.403	493.968	580.639
Gianyar	559.161	598.888	788.098

7. Arahkan peserta didik terkait dengan hubungan antara kepadatan penduduk dan pemerataan kesejahteraan sosial. Misalnya, ajak peserta didik untuk mencari tahu dampak buruk dari ledakan penduduk terhadap kualitas hidup masyarakat.

I. Refleksi

Bapak/Ibu Guru dapat melakukan refleksi pembelajaran pada setiap akhir bab dengan menggunakan fitur Refleksi pada Buku Siswa.

Bapak/Ibu Guru juga perlu melakukan refleksi terhadap pembelajaran yang telah dilakukan. Terdapat banyak cara melakukannya. Salah satunya ialah dengan mengikuti panduan refleksi berikut.

Tabel 6.1 Panduan Refleksi Pembelajaran Fungsi dan Pemodelannya

No.	Panduan Refleksi
1.	Deskripsikan pengalaman Bapak/Ibu Guru dalam mengajarkan Fungsi dan Pemodelannya.
2.	Deskripsikan perasaan dominan Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Fungsi dan Pemodelannya.
3.	Evaluasilah pengalaman Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Fungsi dan Pemodelannya.

No.	Panduan Refleksi
4.	Apa saja pelajaran berharga yang telah dipetik Bapak/Ibu Guru selama mengajarkan Fungsi dan Pemodelannya?
5.	Bagaimana rencana Bapak/Ibu Guru untuk menindaklanjuti pelajaran-pelajaran berharga tersebut?

J. Sumber Belajar

Sumber belajar utama bagi peserta didik adalah Buku Siswa. Selain itu, Bapak/Ibu Guru juga dapat memilihkan sumber-sumber belajar lain yang relevan dengan tujuan pembelajaran dalam bab “Fungsi dan Pemodelannya” ini. Contoh sumber belajar tersebut adalah buku Matematika SMA/SMK Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Glosarium

aktivasi fase pembelajaran ketika peserta didik menggunakan pengetahuan dan struktur yang telah dimilikinya untuk membangun pengetahuan baru

aplikasi fase pembelajaran ketika peserta didik mengaplikasikan pengetahuan atau keterampilannya untuk memecahkan masalah

berpikir kritis kemampuan memproses informasi secara objektif, menemukan koneksi antarinformasi yang diterima, menganalisis dan mengevaluasi informasi, serta menyimpulkan berdasarkan pertimbangan yang matang

demonstrasi fase pembelajaran ketika peserta didik memperoleh demonstrasi dari materi yang dipelajarinya

desmos salah satu platform atau layanan yang menawarkan berbagai bentuk sarana matematika, aktivitas matematika digital, dan kurikulum matematika

gotong royong kemampuan melakukan pekerjaan secara bersama-sama dan sukarela untuk mencapai tujuan tertentu

integrasi fase pembelajaran ketika peserta didik mengintegrasikan (atau mentransfer) pengetahuan atau keterampilan barunya ke permasalahan sehari-hari

jigsaw salah satu jenis pembelajaran kooperatif yang mengatur agar setiap peserta didik di dalam suatu kelompok kecil mempelajari topik-topik yang berbeda sehingga pada akhirnya kelompok tersebut menguasai gabungan topik yang utuh

kefasihan prosedural pengetahuan tentang prosedur, kapan dan bagaimana menggunakan prosedur tersebut dengan tepat, dan keterampilan untuk melakukan prosedur tersebut secara fleksibel, akurat, dan efisien

kreatif kemampuan mengembangkan sesuatu yang orisinal, bermakna, bermanfaat, dan berdampak

mandiri sikap bertanggung jawab atas proses dan hasil belajarnya sendiri

Pelajar Pancasila pelajar Indonesia yang menjadi pelajar sepanjang hayat, kompeten, berkarakter, dan berperilaku sesuai dengan nilai-nilai Pancasila

pemahaman konseptual pemahaman yang utuh terhadap ide-ide matematika

pembelajaran kooperatif pembelajaran yang menggunakan kelompok-kelompok kecil agar peserta didik dapat belajar bersama-sama dalam kelompok tersebut sehingga menghasilkan pengalaman belajar yang optimal

penilaian formatif penilaian yang tujuan utamanya adalah memantau pembelajaran peserta didik dan hasilnya dapat digunakan guru dan peserta didik untuk memperbaiki pengajaran dan pembelajaran

penilaian sumatif penilaian yang bertujuan mengevaluasi pembelajaran peserta didik yang dilakukan pada akhir satuan pembelajaran tertentu dengan membandingkannya dengan standar tertentu

Profil Pelajar Pancasila sekumpulan kompetensi yang diperlukan oleh peserta didik untuk menjadi seorang Pelajar Pancasila

siklus pembelajaran proses terurut yang dilalui oleh peserta didik selama pembelajaran

siklus pengajaran suatu siklus yang berisi tahapan-tahapan yang dapat digunakan oleh guru untuk melakukan pengajaran

Daftar Pustaka

- Abramson, Jay, Valeree Falduto, Rachael Gross, David Lippman, Rick Norwood, Melonie Rasmussen, Nicholas Belloit, Jean-Marie Magnier, Harold Whipple, and Christina Fernandez. *Algebra and trigonometry*. OpenStax, 2015.
- Abubakar, A. S., & Kaisupy, R. A. *Peran Kriptografi dalam Aplikasi WhatsApp*. Yogyakarta: Universitas Amikom Yogyakarta, 2018. https://www.academia.edu/38051131/Hubungan_whatsapp_dengan_kriptografi.
- Anton, Howard, and Chris Rorres. *Elementary linear algebra* (11th ed.). Canada: Anton Textbooks, 2014.
- Aufmann, Richard N., Vernon C. Barker, and Richard D. Nation. *College Algebra and Trigonometry*. USA: Brooks/Cole Publishing Company, 2011.
- Azis, Yunas S. "Suplemen, Gizi Seimbang, dan Atlet." *Kompas*. Diakses pada 2 Februari 2024. <https://interaktif.kompas.id/baca/gizi-seimbang/>.
- "Burning Daylight." Diakses pada 13 Agustus 2021. <https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/56d8aee5637a85a2078c257d?collections=featured-collections,5e73b36a5141777627553357>.
- Citizen Math. "Going Once, Going Twice: How much should you bid in an auction?" *citizen math*. Diakses pada 11 Agustus 2021. <https://www.citizenmath.com/lessons/going-once-going-twice>.
- Dumairy. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE, 2012.
- Eric Balzarini et al. *Pre-Calculus 12*. McGraw-Hill Ryerson, 2012.
- Goode, Stephen W., and Scott Annin. *Differential equations and linear algebra*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.
- Hariyanto dan Kurniawan. "Hari ini Tsunami Aceh Pernah Terjadi 2004 Silam, ini Fakta Dahsyatnya Bencana." *Kompas TV*. Diakses pada 19 Agustus 2021. <https://www.kompas.tv/amp/article/133356/videos/hari-ini-tsunami-aceh-pernah-terjadi-2004-silam-ini-fakta-dahsyatnya-bencana?page=2>.
- Holliday, Luchin, Cuevas, Carter, Marks, Day, Casey, & Hayek. *Algebra 2*. New York: Glencoe/McGraw-Hill, 2008.
- Illustrative Mathematics. "Illustrative Mathematics. Trigonometric Functions." Diakses pada 5 Juli 2021. <https://im.kendallhunt.com/HS/students/3/6/index.html>.
- Illustrative Mathematics. "Polynomial and Rational Functions". Diakses pada 15 Juli 2021. <https://im.kendallhunt.com/HS/students/3/2/index.html>.
- Istiqomah, S. Pd. ""POLINOMIAL (SUKU BANYAK) MATEMATIKA PEMINATAN KELAS XI."" Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2020.
- Kemendikbudristek. *Keputusan Kepala BSKAP Kemendikbudristek Nomor 032/H/KR/2024 tentang Capaian Pembelajaran pada Pendidikan Anak Usia Dini, Jenjang Pendidikan Dasar, dan Jenjang Pendidikan Menengah pada Kurikulum Merdeka*. Jakarta.

- Kristanto, Y. D. *Matematika Langkah Demi Langkah untuk SMA/MA Kelas X*. Jakarta: Grasindo, 2016.
- Kristanto, Y. D., & Santoso, E. B. *Aljabar dan Trigonometri*. Yogyakarta: Sanata Dharma University Press, 2017.
- Larson, Ron, Bruce H. Edwards, and David C. Falvo. *Elementary Linear Algebra* (6th ed.). USA: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, 2009.
- Martin-Gay, E. *Intermediate Algebra* (6th ed.). Boston: Pearson, 2013.
- Martin-Gay, Elayn. *Beginning & intermediate algebra*. Pearson Higher Ed, 2012.
- McAskill, B., Watt, W., Balzarini, E., Johnson, B., Zarski, C. *Pre-Calculus 12*. Canada: McGraw-Hill Ryerson Ltd, 2012.
- Merrill, M. D. *First principles of instruction*. *Educational Technology Research and Development*, 50(3), 43–59, 2002. <https://doi.org/10.1007/bf02505024>.
Merrill, M. D. *First Principles of Instruction: Identifying and Designing Effective, Efficient, and Engaging Instruction*. Hoboken, NJ: Pfeiffer (John Wiley & Sons), 2012.
- Morrison, Karen, and Nick Hamshaw. *Cambridge IGCSE mathematics core and extended Coursebook with CD-ROM*. Cambridge University Press, 2015.
- National Research Council. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: The National Academies Press, 2001. <https://doi.org/10.17226/9822>.
- Open Up Resources. “Polynomial Functions.” Diakses pada 15 September 2021. <https://access.openupresources.org/curricula/our-hs-math/integrated/math-3/unit-3/index.html>.
- Open Up Resources. “Trigonometric Functions, Equations, and Identities.” Diakses pada 17 September 2021. <https://access.openupresources.org/curricula/our-hs-math/integrated/math-3/unit-7/index.html>.
- “Password strength.” WIKIPEDIA. Diakses pada 13 Agustus 2021. https://en.wikipedia.org/wiki/Password_strength.
- Purcell, E. J., D. Varberg, and S. E. Rigdon. “Calculus (9th Edition).” 2007.
- Rahmalia, I. “Apakah Filosofi Batik di Luar Pulau Jawa Sama dengan Batik yang Berasal dari Jawa?” *Bobo.id*. Diakses pada 5 Juli 2021. <https://bobo.grid.id/read/082135113/apakah-filosofi-batik-di-luar-pulau-jawa-sama-dengan-batik-yang-berasal-dari-jawa-yuk-cari-tahu?page=all>.
- Rawuh. *Geometri Transformasi*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 1992.
- Smith, M., Bill, V., & Raith, M. L. *Promoting a Conceptual Understanding of Mathematics*. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 24(1), 36–43, 2018. <https://doi.org/10.5951/mathteacmidscho.24.1.0036>.
- Smith, M.S., & Stein, M.K. *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions* (2nd ed.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2018.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. *Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond*

- Show and Tell. Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340, 2008. <https://doi.org/10.1080/10986060802229675>.
- Stewart, J., Clegg, D. K., & Watson, S. *Calculus: early transcendentals, ninth edition*. Cengage Learning, 2020.
- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. *Algebra and Trigonometry* (4th ed.). Boston: Cengage Learning, 2016.
- Stewart, James. *Calculus Early Transcendentals: 7th Edition*. United States of America: Brooks/Cole, USA, 2012.
- Sufyadi, S., Harjatanaya, T. Y., Adiprima, P., Satria, M. R., Andianti, A., & Herutami, I. *Panduan Pengembangan Proyek Penguatan Profil Pelajar Pancasila*. Jakarta: Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi, 2021.
- Sukino. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI Semester 1 Kelompok Wajib*. Jakarta: Erlangga, 2017.
- Susanto, Agus. “Gizi Seimbang dan Atlet.” *Kompas*. Diakses pada 2 Juli 2021. <https://interaktif.kompas.id/baca/gizi-seimbang/>.
- Thomas, G.B. *Calculus Early Transcendentals: 12th Edition*. New York: Addison-Wesley, 2010.
- Voogt, J., & Roblin, N. P. *A comparative analysis of international frameworks for 21st century competences: Implications for national curriculum policies*. *Journal of Curriculum Studies*, 44(3), 299–321, 2012. <https://doi.org/10.1080/00220272.2012.668938>.

Sumber Data:

Bab 1: <https://power.larc.nasa.gov/>

Daftar Sumber Gambar

Sampul Buku dan Bab Panduan Umum: diunduh dari <https://flic.kr/p/49xhPC> pada 24 September 2024

Sampul Bab 1: diunduh dari <https://unsplash.com/photos/man-in-white-polo-shirt-sitting-in-front-of-computer-H1lhaf9MsN0> pada 24 September 2024

Sampul Bab 3: diunduh dari https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Ever_Given_in_Suez_Canal_viewed_from_ISS.jpg pada 20 Mei 2024

Gambar 3.22: diadaptasi dari Freepik

Sampul Bab 4: diunduh dari <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Royal-clipper.jpg> pada 22 Mei 2024

Sampul Bab 5: Photo dari donoem (2017)

Sampul Bab 6: diunduh dari <https://www.flickr.com/photos/unwomen/24572962378/> pada 24 September 2024

Indeks

A

akar 6, 10, 254, 259, 260, 261, 264, 265, 266, 267, 268, 275, 278, 280
akar, fungsi 6, 10
akhir 6, 18, 32, 40, 59, 68, 71, 85, 112, 118, 123, 131, 134, 146, 153, 158, 170, 172, 208, 230, 235, 237, 246, 247, 287, 290
aljabar 5, 6, 7, 8, 10, 63, 66, 67, 97, 100, 117, 176, 177, 178, 213, 240, 268, 276, 281
amplitudo 137, 141, 163, 169, 171
asimtot 140, 253, 255, 256, 257, 259, 260, 277, 279, 286
asosiatif 29, 32, 228
awal 12, 14, 15, 16, 17, 63, 65, 72, 117, 119, 134, 171, 178, 196, 230, 242, 284

B

baris 22, 23, 37, 38, 47, 55, 83, 87
bilangan 9, 63, 66, 72, 73, 76, 78, 79, 80, 82, 83, 89, 97, 108, 116, 124, 125, 127, 128, 129, 140, 142, 143, 161, 170, 246, 253, 254, 259, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 273, 278, 280
bilangan real 9, 63, 73, 79, 97, 108, 116, 124, 127, 142, 143, 170, 246, 253, 254, 259, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 278, 280

C

cos 125, 126, 127, 128, 130, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 141, 142, 143, 146, 147, 150, 153, 154, 155, 156, 160, 161, 163, 164, 165, 168, 169, 170, 174, 189, 190, 191, 192, 193, 198, 199, 200, 204, 205, 207, 216, 217, 218, 225
cot 129, 160
csc 129, 144, 160

D

daerah asal 101, 253, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 278, 280
daerah hasil 253, 254, 255, 259, 260, 265, 267, 268, 277, 278, 280, 284

datar 6, 7, 10, 22, 47, 177, 178, 195
determinan 8, 20, 40, 42, 43, 53, 54, 57
diagonal 22, 47, 48, 84, 196, 200, 204
distributif 74, 77, 188, 254, 278

E

eksponen 66, 67, 74, 92, 248
elemen 2, 5, 6, 8, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 35, 37, 47, 48, 49, 50, 56, 58, 59

F

Faktor 62, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 105, 106
fungsi 5, 6, 7, 8, 9, 10, 62, 63, 64, 69, 70, 71, 75, 87, 89, 93, 94, 95, 96, 101, 102, 103, 105, 106, 111, 116, 117, 118, 119, 123, 124, 125, 127, 128, 129, 130, 132, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 158, 161, 162, 163, 164, 169, 172, 174, 192, 216, 240, 241, 242, 244, 246, 247, 248, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 278, 279, 280, 281, 284, 285, 286
fungsi akar 6, 10, 260, 261, 264, 265, 266, 267, 268, 278, 280
fungsi eksponensial 6, 10, 247, 268, 269
fungsi logaritma 6, 10, 240, 242, 244, 246, 247, 248, 250, 251, 252, 253
fungsi polinomial 7, 8, 62, 63, 64, 69, 70, 71, 87, 89, 93, 94, 95, 105, 106
fungsi rasional 6, 10, 253, 254, 255, 256, 258, 259, 260, 265, 278, 280, 285
fungsi trigonometri 5, 6, 9, 116, 118, 119, 123, 124, 125, 127, 128, 129, 130, 132, 134, 141, 158, 161, 162, 172, 174

G

ganjil 71, 92, 129, 130, 264
garis 7, 119, 125, 146, 148, 157, 170, 204, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 219, 220, 221, 222, 223, 230, 231, 234, 237, 246, 255, 256, 257, 259, 271, 279
genap 92, 101, 106, 129, 130, 264
grafik 9, 10, 63, 70, 71, 75, 93, 94, 95,

96, 100, 101, 102, 105, 106, 108, 109,
111, 112, 116, 122, 130, 132, 133,
134, 135, 136, 137, 138, 139, 140,
141, 143, 144, 163, 170, 171, 174,
244, 246, 247, 253, 255, 256, 257,
259, 260, 261, 262, 263, 265, 266,
267, 268, 269, 271, 273, 276, 279,
280, 286

H

horizontal 137, 204, 255, 256, 257, 259,
279

Horner 62, 82, 83, 84, 85, 88, 91, 103,
104, 105, 114

I

identitas 6, 8, 9, 22, 39, 47, 48, 52, 57,
62, 63, 97, 98, 99, 107, 109, 114, 116,
117, 142, 143, 144, 145, 146, 147,
158, 164, 165, 216, 247, 248, 249, 250
invers 8, 20, 43, 44, 47, 54, 57
invers matriks 8, 20, 43, 44, 47, 54, 57

K

kesamaan dua matriks 8, 20, 24, 25, 26,
48, 49, 50, 56
koefisien 66, 84, 92, 101, 106
kolom 13, 16, 20, 22, 23, 24, 32, 37, 38,
39, 42, 55, 62, 68, 74, 77, 79, 81, 85,
87, 88, 89, 91, 99, 104, 116, 131, 133,
138, 139, 152, 154, 158, 176, 210,
232, 240, 249, 258, 267
komutatif 29, 32, 39, 55, 188, 234
konstanta 66, 92
kosinus 124, 127, 134, 136, 137, 138, 139,
147, 150, 165, 174, 192

L

lingkaran 6, 7, 9, 117, 124, 125, 143, 146,
153, 161, 215, 216, 219, 231
lingkaran satuan 6, 9, 124, 125, 143, 146
logaritma 6, 10, 240, 242, 243, 244, 246,
247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 277

M

matriks 5, 6, 8, 9, 20, 21, 22, 23, 24, 25,
26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35,
36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 46,
47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56,

57, 58, 59, 60, 210, 211, 220, 221,
222, 223, 224, 225, 226, 227, 228,
229, 231, 233, 234
metode 13, 47, 49, 51, 82, 83, 84, 85, 88,
91, 103, 104, 105, 114, 230, 270, 275
Metode 297
miring 255, 256, 279
model luas 75
monomial 65, 66, 67, 68, 100

N

negatif 50, 66, 71, 89, 101, 106, 119, 124,
125, 129, 150, 155, 255, 256, 257,
259, 279
nilai mutlak 6, 10, 269, 271
nol 8, 22, 29, 32, 39, 47, 48, 62, 63, 90,
91, 92, 93, 94, 95, 96, 109, 183, 184,
185, 189, 199, 246, 252, 253, 255,
256, 257, 259, 260, 261, 263, 264,
265, 278, 279
notasi 176, 177, 178, 180, 186, 269, 272

O

ordo 8, 22, 25, 27, 50, 54

P

pembagian 8, 62, 63, 78, 79, 80, 81, 82,
83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 103,
104, 105, 114, 256, 279
pembagian bersusun 79, 80, 81, 82, 83,
104, 256, 279
pembuat nol 8, 62, 63, 90, 91, 93, 94, 95,
109, 253, 264
pembfaktoran 8, 62, 94
pembfaktoran polinomial 8, 62
pengurangan 8, 9, 20, 30, 31, 32, 51, 62,
63, 72, 73, 74, 83, 145, 147, 277
pengurangan matriks 30, 31, 32, 51
pengurangan polinomial 73
penjumlahan 8, 9, 20, 26, 27, 28, 29, 30,
32, 34, 35, 50, 62, 63, 66, 67, 72, 73,
74, 77, 83, 84, 100, 145, 147, 180,
224
penjumlahan matriks 26, 27, 28, 29, 30,
32, 34, 35, 50
perilaku ujung 71, 101, 106
periode 118, 134, 139, 140, 141, 163, 169
perkalian 8, 20, 21, 34, 35, 36, 37, 38, 39,
40, 46, 53, 55, 62, 63, 66, 72, 74, 75,

76, 77, 84, 180, 184, 186, 227, 228,
229, 234
perkalian matriks 34, 35, 37, 39, 46, 55,
227, 228
perkalian matriks dengan skalar 34, 35
perkalian polinomial 62, 63, 72, 75, 77
persegi 22, 23, 39, 47, 48, 102, 195, 196,
200, 201, 220, 230
persegi panjang 23, 47, 48, 102, 195, 196
polinomial 5, 6, 7, 8, 62, 63, 64, 65, 66,
67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 75, 77, 78,
79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88,
89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 98, 99,
100, 101, 102, 104, 105, 106, 107,
109, 114, 241
posisi baku 119, 125, 160
positif 3, 89, 106, 108, 119, 124, 125, 127,
129, 155, 160, 168, 180, 186, 199,
246, 255, 256, 257, 259, 279
Pythagoras 108, 117, 142, 143, 146, 150,
153, 154, 155, 197, 261

R

radian 119, 121, 122, 123, 225
rasional 6, 10, 93, 109, 253, 254, 255,
256, 258, 259, 260, 265, 278, 280, 285
rasional, fungsi 6, 10
real 9, 63, 73, 79, 97, 108, 116, 124, 127,
142, 143, 170, 246, 253, 254, 259,
261, 262, 263, 264, 265, 266, 267,
278, 280

S

Sarrus 42
sec 129, 145, 160, 162
segitiga 22, 23, 24, 47, 102, 108, 117, 131,
148, 149, 150, 151, 152, 154, 155,
156, 157, 158, 167, 170, 195, 230
sesepenggal 273, 284
simetris 22, 47, 48
sin 125, 126, 127, 128, 130, 131, 134,
135, 138, 139, 142, 144, 146, 147,
148, 149, 150, 152, 153, 160, 161,
163, 164, 165, 166, 168, 174, 198,
205, 207, 216, 217, 218, 225
sinus 6, 9, 124, 127, 134, 136, 137, 138,
139, 165, 174
Sisa 8, 62, 86, 87, 88, 90, 91, 103, 104

sisi 108, 123, 125, 146, 150, 151, 153,
157, 160, 170, 269
sistem persamaan linear 40, 42, 45, 46,
105, 106
skalar 8, 20, 34, 35, 180, 182, 184, 185,
186, 188, 193, 194, 203, 234
sudut 9, 10, 117, 119, 120, 121, 122, 123,
125, 126, 127, 129, 143, 145, 146,
147, 150, 153, 155, 157, 160, 161,
162, 165, 167, 168, 177, 189, 190,
191, 199, 200, 202, 204, 205, 207,
230, 237

T

tan 125, 126, 127, 130, 140, 143, 145,
160, 161, 162, 166, 168, 174
tangen 127, 139, 140, 174
tangga 6, 10, 271, 272
tegak 22, 23, 48, 197, 201, 204, 206, 213
Teorema 8, 62, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 94,
103, 104, 106, 142, 197
transpos 8, 20, 22, 23, 24, 38
trigonometri 5, 6, 7, 9, 116, 117, 118,
119, 123, 124, 125, 127, 128, 129,
130, 132, 134, 141, 142, 143, 144,
145, 158, 161, 162, 172, 174, 177,
211, 216

U

umum 62, 68, 116, 119, 136, 158, 180,
186, 219, 255

V

vektor 5, 6, 7, 10, 11, 176, 177, 178, 179,
180, 181, 182, 183, 184, 185, 186,
187, 188, 189, 190, 191, 192, 193,
194, 195, 197, 198, 199, 203, 204,
205, 207, 208, 211, 215, 216, 223, 234
vertikal 84, 136, 138, 140, 255, 256, 257,
259, 279, 286

Profil Pelaku Perbukuan

Profil Penulis

Nama Lengkap : Yosep Dwi Kristanto, M.Pd.
Email : yosepdwikristanto@usd.ac.id
Instansi : Universitas Sanata Dharma;
Johannes Kepler University
Alamat Instansi : Jl. Affandi, Mrican, Caturtunggal,
Depok, Sleman, DIY;
Altenberger Str. 69, 4040 Linz
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. Dosen Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta (2016—sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S-2: Program Pascasarjana/Pendidikan Matematika/Universitas Negeri Surabaya (2013—2015)
2. S-1: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam/Pendidikan Matematika/Universitas Negeri Malang (2008—2012)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Matematika untuk SMP/MTs Kelas IX (2022)
2. Buku Panduan Guru Matematika untuk SMP/MTs Kelas IX (2022)
3. Matematika Tingkat Lanjut SMA Kelas XI (2021)
4. Buku Panduan Guru: Matematika Tingkat Lanjut SMA Kelas XI (2021)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Exploring Preservice Mathematics Teachers' Noticing of Students' Thinking on Probability
2. Adaptasi dan Implementasi Prinsip-Prinsip Desain Pembelajaran Jarak Jauh Daring Oleh Calon Guru Matematika (2023)
3. How More Can Be Less: Facing Kurikulum Merdeka and Its Paradox of Choice (2022)
4. Towards a mathematics textbook for supporting 21st century learning: The student perspective (2020)

Portofolio selengkapnya dapat dilihat pada laman
<http://people.usd.ac.id/~ydkristanto/> dan <https://kristantomath.com/>.



Profil Penulis

Nama Lengkap : Muhammad Taqiyuddin
Email : taqimathed@gmail.com
Instansi : University of Auckland
Alamat Instansi : 38 Princes Street, Auckland CBD,
Auckland 1010
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. *Curriculum Specialist*, Sekolah.mu (2022)
2. Asisten Dosen, University of Georgia (2020—2021)
3. Guru Matematika Sekolah Menengah (2016—2019)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S-3: Pendidikan Matematika, University of Auckland, Selandia Baru (2021—sekarang)
2. S-2: Pendidikan Matematika, University of Georgia, Amerika Serikat (2019—2021)
3. S-1: Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung (2012—2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Matematika untuk SMP/MTs Kelas IX (2022)
2. Buku Panduan Guru Matematika untuk SMP/MTs Kelas IX (2022)
3. Matematika Tingkat Lanjut SMA Kelas XI (2021)
4. Buku Panduan Guru: Matematika Tingkat Lanjut SMA Kelas XI (2021)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. After School Closure: How Indonesian Senior High School Responded to Students' Learning Loss (2023)
2. Stories of Our Fellow Mathematics Tutors during Covid-19 Pandemic (2022)
3. Pre-service teachers' operative and figurative actions: The case of one-variable inequality (2021)
4. Analisis buku matematika kurikulum 1975 dan kurikulum 2013 (2020)
5. Analisis Buku Matematika Sekolah Menengah Atas Pada Topik Turunan (2019)
6. Telaah buku matematika Indonesia pada topik pertidaksamaan matematika (2018)

Portofolio selengkapnya dapat dilihat pada laman
<https://s.id/GoogleScholarMuhammadTaqiyuddin>



Profil Penulis

Nama Lengkap : Dr. Al Azhary Masta, M.Si.
Email : alazhari.masta@upi.edu
Instansi : UPI
Alamat Instansi : FPMIPA Universitas Pendidikan
Indonesia, Jl. Dr. Setiabudi No.229,
Kota Bandung, Jawa Barat 40154
Bidang Keahlian : Matematika Analisis



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. Dosen Program Studi S-1 Program Studi Matematika FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia (2015—sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S-3: Matematika, Institut Teknologi Bandung (2013—2018)
2. S-2: Matematika, Institut Teknologi Bandung (2011—2013)
3. S-1: Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia (2007—2011)

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 tahun terakhir)

1. Buku Siswa dan Guru Matematika SD Kelas I, Puskurbuk (2022)
2. Buku Siswa dan Guru Matematika SD Kelas II, Puskurbuk (2022)
3. Buku Siswa dan Guru Matematika SMA/ MA/ SMK Kelas X, Penerbit Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud (2020)
4. Buku digital Pusat Perbukuan untuk Program Kelas IV, V, VI (2019)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Buku Siswa dan Buku Guru Matematika Peminatan SMA Kelas X, Puskurbuk (2019)
2. Math Project untuk kelas I SD, IV SD, VII SD, Penerbit Yrama Widya Bandung (2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

Hasil penelitian selengkapnya dapat dilihat dengan id berikut.

Id Scopus	57189662322
Id Google Scholar	5cxkPMUAAAAJ
Id Sinta	6007709

Profil Penulis

Nama Lengkap : Elyda Yulfiana, S.Pd.
Email : elydayulfiana@gmail.com
Instansi : SMA Negeri 7 Yogyakarta
Alamat Instansi : Jl. MT. Haryono No.47,
Suryodiningratan, Kec. Mantrijeron,
Kota Yogyakarta, Daerah Istimewa
Yogyakarta
Bidang Keahlian : Guru Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. Guru matematika di SMA Negeri 7 Yogyakarta (2018—sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar:

1. Pendidikan Profesi Guru, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta (2018)
2. S-1: Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Pendidikan Matematika, Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa Yogyakarta (2012—2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Matematika untuk SMP/MTs Kelas IX (2022)
2. Buku Panduan Guru Matematika untuk SMP/MTs Kelas IX (2022)
3. Matematika Tingkat Lanjut SMA Kelas XI (2021)
4. Buku Panduan Guru: Matematika Tingkat Lanjut SMA Kelas XI (2021)
5. Yulfiana, E. Jalan Menuju Guru yang Mencintai Anak Didik dan Murah Hati. In Eko Budi Santoso (Ed.), Jalan Menuju Guru Matematika yang Mencintai Anak Didik dan Profesinya (pp. 77-86). Yogyakarta: Sanata Dharma University Press (2018).

Profil Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Sunardi, M.Pd.
Email : sunardi.fkip@unej.ac.id
Instansi : –
Alamat Instansi : FKIP Universitas Jember, Jl.
Kalimantan Nomor 37 Jember
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. Dosen Program Studi S-1, S-2, dan S-3 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember (1983—sekarang)
2. Dosen Penguji Disertasi S-3 Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang dan Universitas Negeri Surabaya (2016—sekarang)
3. Dosen Penguji Tesis S-2 Universitas Terbuka (2012—sekarang)
4. Ketua Panitia Pelaksana Sertifikasi Guru Rayon 16 Universitas Jember (2007—2016)
5. Guru Matematika di SMA (1981–1985)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S-3: Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya, lulus tahun 2005
2. S-2: Pendidikan Matematika, IKIP Malang, lulus tahun 1996
3. S-1: Pendidikan Matematika, IKIP Malang, lulus tahun 1981

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 Tahun Terakhir)

1. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika SMA/SMK Kelas X (2022)
2. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika SMA/SMK Kelas XI dan XII (2021)
3. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika Untuk Program Peminatan SMA/MA Kelas X (2019)
4. Buku Guru dan Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VII (2018) (Editor)
5. Matematika Fisika 1 dan Matematika Fisika 2 (2018)
6. Strategi Belajar Mengajar IPA (2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Kapita Selekta: Relasi & Fungsi, Limit, Turunan, dan Integral (2022)
2. Geometri Analitik: Tinjauan pada Bidang Datar (2020)
3. Penalaran Matematika, Himpunan, Relasi dan Fungsi (2018)
4. Teori dan Soal-Soal Geometri Analitika Bidang (2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Judul Penelitian dan Publikasi dapat dilihat pada: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57193683524>.



Profil Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Kiki Ariyanti Sugeng
Email : kiki@sci.ui.ac.id
Instansi : Universitas Indonesia
Alamat Instansi : Kampus UI Depok, 16424
Bidang Keahlian : Matematika Kombinatorik



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. 1986—sekarang : Dosen Tetap Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia
2. 2018—2023 : Vice President of Institute Combinatorics and Its Application
3. 2012—2016 : Wakil Presiden Indonesian Mathematical Society (IndoMS)
4. 2016—sekarang : Chief Editor of Indonesian Journal of Combinatorics
5. 2013—sekarang : Managing Editor of Electronic Journal of Graph Theory and Applications

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. 2001—2006 : Doctor of Philosophy, University of Ballarat, Australia
2. 1985—1987 : Magister Matematika, Institut Teknologi Bandung
3. 1979—1985 : Sarjana Matematika, Universitas Indonesia

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Matriks dalam Pelabelan Graf (2023), UI Publishing

Judul Buku yang Pernah Ditelaah (10 Tahun Terakhir)

1. Matematika SD Kelas VI (Buku Siswa dan Buku Guru)
2. Matematika SMP Kelas VII (Buku Siswa dan Buku Guru)
3. Matematika SMA Tingkat Lanjut Kelas XI (Buku Siswa dan Buku Guru)
4. Matematika SMA Tingkat Lanjut Kelas XII (Buku Siswa dan Buku Guru)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Sugeng, K.A., John, P., Lawrence, M.L., Anwar, L.F., Bača, M., Semaničová-Feňovčíková, A., Modular irregularity strength on some flower graphs, *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 2023, 11(1), pp. 27 -38.
2. Hinding, N., Sugeng, K.A., Nurlindah, Wahyudi, T.J., Simanjuntak, R., Two types irregular labelling on dodecahedral modified generalization graph, *Heliyon*, 2022, 8(11), e11197
3. Judul lain dapat dilihat di: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=12797262400>
<https://scholar.ui.ac.id/en/persons/kiki-ariyanti>



Profil Ilustrator

Nama Lengkap : Yol Yulianto
Email : yolyulianto@gmail.com
Instansi : Polkadot
Alamat Instansi : Taman Rembrandt Blok R.04 No.88
Citra Raya Tangerang
Bidang Keahlian : Ilustrasi



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. Ilustrator Majalah Anak Ina, tahun 1998-2000
2. Ilustrator Majalah Ori-Kompas Gramedia, tahun 2001-2010
3. Ilustrator Majalah Superkids Junior, tahun 2011-2014
4. Ilustrator Freelance, tahun 2015-sekarang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. SD Negeri Panggung 1 Semarang tahun belajar 1979-1985
2. SMP Negeri 3 Semarang tahun belajar 1985-1988
3. SMA Negeri 1 Semarang tahun belajar 1988-1991
4. FT Arsitektur Undip Semarang tahun belajar 1991-1996

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Rumah Ajaib, Penerbit Elexmedia Komputindo, tahun 2009
2. Karnaval Loli, Penerbit Elexmedia Komputindo, tahun 2009
3. Seri Buku Stiker Kolase, Penerbit Bhuana Ilmu Populer, tahun 2010
4. Cerita Rakyat Nusantara. Penerbit Bhuana Ilmu Populer, tahun 2012
5. Siri Cerita Berirama, Penerbit PTS Malaysia, tahun 2016
6. Seri Komilag, Direktorat PAUD dan Dikmas, tahun 2016-2019
7. Seri Aku Anak Cerdas, Penerbit Bhuana Ilmu Populer, tahun 2018
8. Seri 60 Aktivitas Anak, Penerbit Bhuana Ilmu Populer, tahun 2019
9. Seri Tangguh Bencana, Direktorat PAUD dan Dikmas, tahun 2019
10. Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Kelas 5, Pusmenjar, tahun 2020

Penghargaan

1. Juara Pertama Lomba Komik Departemen Agama tahun 2004
2. Juara Pertama Lomba Maskot Pilkada Kab. Pidie Jaya tahun 2017
3. Juara Pertama Lomba Maskot Pilkada Kab. Mamasa tahun 2017
4. Lima karya terbaik Lomba Maskot Germas tahun 2018
5. Juara Pertama Lomba Maskot Pilkada Kota Bitung tahun 2019
6. Juara Pertama Lomba Maskot Pilkada Kota Manado tahun 2019

Profil Penyunting

Nama Lengkap : Uly Amalia, S.Si.
Email : ulyaaa13@gmail.com
Instansi : -
Alamat Instansi : -
Bidang Keahlian : Matematika Sekolah Dasar



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. Editor, *proofreader*, dan penulis lepas (2012–sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S-1: Departemen Matematika, Institut Pertanian Bogor (2001)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Buku Teks Pendamping Matematika untuk SD/MI Kelas IV (2023)
2. Target Nilai 100 Ulangan Tematik SD/MI Kelas 3 (2021)

Judul Buku yang Disunting dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Dasar-Dasar Teknik Jaringan Komputer dan Telekomunikasi untuk SMK/MAK Kelas X, Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi (2023)
2. Buku Panduan Guru Dasar-Dasar Teknik Jaringan Komputer dan Telekomunikasi untuk SMK/MAK Kelas X, Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi (2023)
3. Buku Teks Pendamping Matematika untuk SD/MI Kelas II, Bukit Mas Mulia (2023)
4. Ilmu Pengetahuan Sosial untuk SMP/MTs Kelas VII (Edisi Revisi), Kemdikbudristek (2023)
5. Panduan Guru Ilmu Pengetahuan Sosial untuk SMP/MTs Kelas VII (Edisi Revisi), Kemdikbudristek (2023)
6. Matematika untuk SD/MI Kelas II, Pusat Perbukuan, Kemdikbudristek (2022)
7. Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas II, Pusat Perbukuan, Kemdikbudristek (2022)

Profil Penyunting Visual

Nama Lengkap : Nadia Mahatmi
Email : nadia.mahatmi@umn.ac.id
Instansi : Universitas Multimedia Nusantara
Alamat Instansi : Jl. Scientia Boulevard, Gading
Serpong, Kel. Curug Sangereng, Kec.
Kelapa Dua, Kab. Tangerang, Prop.
Banten 15810
Bidang Keahlian : Ilustrasi



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. Dosen Desain Komunikasi Visual – Universitas Multimedia Nusantara (2017–sekarang)
2. Dosen Desain Komunikasi Visual – Telkom University (2015–2017)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. Magister Desain – Institut Teknologi Bandung (2012–2015)
2. Sarjana Desain Komunikasi Visual – Institut Teknologi Bandung (2005–2009)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit

1. *Board Game Design to Learn about User Persona in Entrepreneurship Programme* in Kurikulum Merdeka (2023)
2. Ujicoba Buklet Aktivitas Museum Bank Indonesia untuk Siswa Sekolah Menengah (2021)
3. Perancangan Board Game Kolaboratif. Studi Kasus: Legenda Gunung Tondoyan (2021)
4. Mascot Design for the Indonesian Pavilion at World Expo 2020 (2020)
5. Activity Booklet Design for Museum Bank Indonesia for Middle School Students (2020)

Informasi Lain

Google Scholar

<https://scholar.google.com/citations?hl=en&authuser=1&user=QKx9wA4AAAAJ>



Profil Penata Letak (Desainer)

Nama Lengkap : Dono Merdiko
Email : donoem.2022@gmail.com
Instansi : Praktisi Perbukuan
Alamat Instansi : Jl. Akmaliah No. 24, 13730
Bidang Keahlian : Desain Buku



Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir)

1. Penata Letak Mizan Group. 2013-2021
2. Penata Letak Penerbit Kasyaf. 2005-2021
3. Penata Letak Lepas Pusat Kurikulum dan Perbukuan. 2014-2019

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. Bina Sarana Informatika, Manajemen Informatika, 2002

Buku yang Pernah Dibuat Ilustrasi/Desain (10 Tahun Terakhir)

1. Buku Seri Tematik, Pusat Kurikulum dan Perbukuan (2014–2019)
2. Buku Panduan Guru Pengembangan Pembelajaran untuk Satuan PAUD, Pusat Perbukuan (2021)
3. Buku Panduan Guru Sejarah untuk SMA/SMK Kelas XI, Pusat Perbukuan (2021)
4. Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/SMK Kelas XI, Pusat Perbukuan (2021)
5. Matematika untuk SD/MI Kelas I, Pusat Perbukuan (2022)
6. Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas I, Pusat Perbukuan (2022)
7. Matematika untuk SD/MI Kelas II, Pusat Perbukuan (2023)
8. Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas II, Pusat Perbukuan (2023)